UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI FISICA TEORICA

TESI

FORMULAZIONE ADM COVARIANTE ED APPLICAZIONI ALLA RELATIVITA' GENERALE

Ivan Sinicco

Relatore Prof. G. Denardo

Correlatori Prof. M. Ferraris
Prof. M. Francaviglia

anno accademico 1987 - 1988

INDICE

"...la filosofia e' scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si puo' intender se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali e' scritto. Egli e' scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi e' impossibile ad intenderne umanamente parola; senza questi e' un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto"

G. Galilei Il Saggiatore

INTRODUZIONE

Attorno agli anni '60 venne proposto da Arnowitt, Deser e Misner [1] un formalismo atto a fornire una descrizione hamiltoniana per la relatività generale. Questo formalismo si basa su un fogliettamento dello spazio-tempo M, (generalmente scelto in modo tale che i fogli siano del tipo spazio), e sulla scelta di campi canonicamente coniugati definiti su questi fogli. Questi campi sono:

i) La metrica 3-dimensionale g_{ij} indotta su questo fogliettamento da quella 4-dimensionale $g_{\mu\nu}$ (poiche' ci riferiremo sempre alla relatività generale gli indici latini correranno sui fogli mentre gli indici greci sullo spazio-tempo).

ii) Il momento canonicamente coniugato π_{ij} definito dalla

$$\pi_{ij} = \partial L_{ADM}/\partial(\partial_t g_{ij})$$

essendo L_{ADM} la lagrangiana ADM definita da:

$$L_{ADM} = N(g)^{1/2}(R + K_{ij}K^{ij} - K^2)$$

Un flusso di tempo, descritto da un campo vettoriale $X = X^{\lambda}\partial_{\lambda}$ tale che $\pounds_X t = 1$ (con t indicando un'opportuna funzione temporale), serve ad identificare i fogli Σ_t con il foglio iniziale Σ_0 (superficie di Cauchy).

L'evoluzione nel tempo dei dati iniziali assegnati su di quest'ultima superficie Σ_0 ci fornisce la dinamica del sistema. L'hamiltoniana del sistema viene allora determinata tramite una opportuna trasformazione di Legendre della lagrangiana ADM che descrive il sistema.

Se la varietà M considerata è assunta senza bordo, i termini di superficie provenienti dalla divergenza presente nella lagrangiana ADM non compaiono, e l'hamiltoniana è data da un'espressione del tipo

$$H = \int (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i)\omega$$

la quale risulta essere l'hamiltoniana vera del sistema (si veda il cap. 3 per le notazioni).Per vari motivi, specialmente ai fini delle applicazioni in astrofisica ed alla gravità quantistica, si è pero' verificato che, se la varietà M ha bordo, certi termini di superficie debbono venire considerati ed inglobati nella hamiltoniana di volume. Tali termini, quando si considerano soluzioni asintoticamente piatte, vengono ad identificarsi con il quadrivettore energia-momento e con il tensore momento angolare del sistema. In particolare, la componente temporale del quadrivettore energia-momento si identifica con l'energia del sistema (o massa ADM). A tal proposito fa testo la trattazione dovuta a Regge e Teitelboim [2].

La covarianza su M, concetto fortemente collegato alle leggi di conservazione, viene meno nella formulazione ADM standard. Essa puo' essere ricostruita solo a patto di complicate integrazioni concettuali. Di qui l'esigenza, presto sentita da molti autori, di costruire formalismi di tipo ADM completamente covarianti.

Una delle possibili formulazioni ADM covarianti, è stata proposta in [3], si basa sul concetto di forma di Poincarè-Cartan assieme alla richiesta dell'esistenza di un campo vettoriale regolare. Questi due strumenti ci permettono di costruire un flusso d'energia globale tramite il quale si costruisce la formulazione ADM covariante. Quando questa viene applicata ad una teoria lagrangiana di campo essa ci permette di interpretare, come vedremo, in un modo del tutto naturale i vari termini di bordo che compaiono in ogni descrizione hamiltoniana per teorie di campo. Inoltre, il meccanismo per ricavare tali termini risulta essere abbastanza semplice.

Questa tesi è organizzata come segue:

Nel primo capitolo riassumiamo le strutture matematiche utilizzate. Nel secondo, vengono innanzitutto introdotti i concetti necessari alla costruzione della formulazione ADM covariante, nonchè i concetti da utilizzare per interpretare i risultati dell'applicazione di tale formalismo alla relatività generale. Nel terzo viene ricapitolato il formalismo ADM standard, nonchè introdotto quello covariante. Finalmente, nel quarto capitolo vengono presentati i risultati dell'applicazione di tale formulazione covariante alla teoria della relatività generale, che viene trattata in diverse formulazioni lagrangiane. I vari termini di bordo che, secondo l'idea di Regge e Teitelboim, vengono ad aggiugersi alla hamiltoniana "di volume", vengono ricavati da varie ipotesi, procedendo quindi alla loro interpretazione dinamica ed alla verifica dei legami tra questi esistenti.

CAPITOLO I

STRUTTURE MATEMATICHE E DEFINIZIONI

Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre il lettore alle notazioni utilizzate nel testo. Qui non verrà esposta semplicemente una lista delle notazioni, ma queste verranno introdotte gradualmente tramite le definizioni stesse dei concetti utilizzati, aiutando così il lettore a rinfrescarsi la memoria su queste strutture che sono supposte note.

§ I.1 - VARIETA` FIBRATE, GETTI DI VARIETA` FIBRATE

Una *categoria* $\mathcal{A}$ consiste in:

i) Una classe di insiemi, denotati con E, F,... e chiamati *oggetti* di $\mathcal{A}$

ii) Una classe di mappe tra coppie di questi insiemi denotata con $\mathbf{MOR}(E,F)$, chiamate *morfismi* di $\mathcal{A}$, tali che, se $E, F, G \in \mathcal{A}$, $f \in \mathbf{MOR}(E,F)$ e $g \in \mathbf{MOR}(F, G)$ allora $g \circ f \in \mathbf{MOR}(E, G)$ essendo questa composizione associativa.

$\mathbf{MOR}(E, E)$ è una classe non vuota, la quale contiene sempre (almeno) il morfismo identità, che viene denotato con Id_E.

Un morfismo $f \in \mathbf{MOR}(E,F)$ è chiamato *isomorfismo* se esiste $g \in \mathbf{MOR}(F, E)$ tale che $f \circ g = Id_F$; $g \circ f = Id_E$.

<u>Esempio</u> - Categoria delle varietà differenziabili, che viene denotata con Man. Gli isomorfismi di questa categoria sono chiamati *diffeomorfismi*.

Siano ora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie e $\mathbf{C}$ una corrispondenza tra gli oggetti ed i morfismi di queste categorie. $\mathbf{C}$ è detto essere un *funtore covariante* se essendo $f \in \mathbf{MOR}(E,F)$; $g \in \mathbf{MOR}(F, G)$ e $\mathbf{C}(f) \in \mathbf{MOR}(\mathbf{C}(E), \mathbf{C}(F))$; $\mathbf{C}(g) \in \mathbf{MOR}(\mathbf{C}(F), \mathbf{C}(G))$ allora $\mathbf{C}(g) \circ \mathbf{C}(f) = \mathbf{C}(g \circ f)$.

Sia ora $M \in \mathrm{Man}$, con $\dim M = m$. Le seguenti strutture associate ad M sono sovente utilizzate nel testo:

Il *fibrato tangente* (*cotangente*) TM (T^*M), nonchè i loro k-prodotti esterni $\Lambda^k TM$ $(\Lambda^k T^*M)$. Denotiamo con $\mathcal{F}(M)$ l'anello delle funzioni $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, con $\mathcal{X}(M)$ lo $\mathcal{F}(M)$-modulo dei campi vettoriali globali su M e con $\Omega^k(M)$ lo $\mathcal{F}(M)$-modulo delle k-forme globali su M.

Le carte locali di M saranno denotate con $\underline{\Psi} = (\underline{U}, \underline{\phi})$, dove $\underline{U}$ è un aperto di M; $x^\alpha(\underline{\Psi})$ sarà l'espressione locale per l'omeomorfismo $\underline{\phi}$, con $\alpha = 1,\ldots,m = \dim M$.

Le basi associate a $\underline{\Psi}$ saranno denotate con $dx^\alpha(\underline{\Psi})$ ed i campi vettoriali coordinati con $\partial_\alpha(\underline{\Psi}) = \partial/\partial x^\alpha(\underline{\Psi})$. Le seguenti forme sono definite sull'aperto $\underline{U}$

$$\omega(\underline{\Psi}) = dx^1(\underline{\Psi}) \wedge \ldots \wedge dx^m(\underline{\Psi})\,; \quad \omega_\alpha(\underline{\Psi}) = \partial_\alpha(\underline{\Psi}) \rfloor \omega(\underline{\Psi}),$$

dove $\rfloor$ stà ad indicare l'operazione di prodotto interno.

DEFINIZIONE - Una *varietà fibrata* è una terna $\mathbb{B} = (B, M, \pi)$ dove

i) $B \in \mathrm{Man}$, con $\dim B = n+m$, è chiamata lo *spazio totale*;

ii) $M \in \mathrm{Man}$, con $\dim M = m$ è chiamata *base*;

iii) $\pi \in \mathbf{MOR}(B,M)$ è una summersione suriettiva, chiamata *proiezione canonica*.

Per ogni $p \in M$ la sottovarietà $\pi^{-1}(p)$ è chiamata *fibra* di B su p.

In una varietà fibrata $\mathbb{B}$ si puo' sempre dare un atlante, le cui carte $\Psi = (U,\phi)$ siano *carte fibrate* su carte $\underline{\Psi}$ di M, cioè tali che risulti $pr \circ \phi = \underline{\phi} \circ \pi$ dove con pr s'intende la proiezione $pr: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se le carte Ψ di un atlante di $\mathbb{B}$ sono fibrate sulle $\underline{\Psi}$ di un atlante di M, l'atlante di $\mathbb{B}$ assegnato verrà chiamato *atlante fibrato*.

In coordinate locali, una carta fibrata di $\mathbb{B}$ sarà indicata con $(U, x^\alpha(\Psi), y^a(\Psi))$, dove assume i valori $\alpha = 1,\ldots,m$ ed $a = 1,\ldots,n =$

$= \dim B - \dim M$. Le coordinate $(x^\alpha(\Psi), y^a(\Psi))$ sono chiamate *coordinate fibrate*, o *naturali*.

Le basi associate alla carta fibrata saranno denotate con $(dx^\alpha(\Psi), dy^a(\Psi))$, ed i campi vettoriali coordinati con $(\partial_\alpha(\Psi), \partial_a(\Psi))$, dove $\partial_\alpha(\Psi) = \partial/\partial y^a(\Psi)$.

Per *sezione locale* di $\mathbb{B}$ s'intende un morfismo $\sigma \in \mathcal{MOR}(\underline{U}, B)$, con $\underline{U} \subseteq M$ aperto, tale che $\pi \circ \sigma = Id_{\underline{U}}$.

Se $\underline{U} \equiv M$, la sezione σ si dice essere una *sezione globale* di $\mathbb{B}$. L'insieme delle sezioni (locali) di $\mathbb{B}$ sarà denotato con $\Gamma(\pi)$. In coordinate fibrate $(x^\alpha(\Psi), y^a(\Psi))$ una sezione locale è rappresentata dalle

$$\sigma : x^\alpha \longrightarrow (x^\alpha, y^a); \quad y^a = \sigma^a(x^\alpha)$$

(dove si è tralasciata la dipendenza da Ψ per non appesantire la notazione).

Siano $\mathbb{B} = (B, M, \pi)$ e $\mathbb{B}' = (B', M, \pi')$ due varietà fibrate. Se $\Phi \in \mathcal{MOR}(B, B')$ ed il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} \Phi : B \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & B' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

si dice che il morfismo Φ è un *morfismo* (di B in B') *fibrato* su M.

Sia $\mathbb{B}$ una varietà fibrata e TB lo spazio totale del fibrato tangente associato a $\mathbb{B}$. La mappa

$$T\pi : TB \longrightarrow TM$$

è definita in modo canonico e viene chiamata *mappa tangente* della proiezione π.

Il nucleo di $T\pi$ definisce una sottovarietà di TB che viene denotata con $V(B)$. $V(B)$ puo` essere pensato come spazio totale di una varietà fibrata, se definiano come proiezione canonica la mappa naturale $\mu : V(B) \longrightarrow B$ ottenuta per restrizione della proiezione naturale di TB su B. La terna

$$VB = (V(B), M, \pi \circ \mu)$$

viene chiamata *fibrato verticale* di $\mathbb{B}$ e le sue sezioni vengono dette *campi vettoriali verticali* di $\mathbb{B}$. Questo, essenzialmente, è un fibrato costruito da tutti i vettori tangenti alle fibre di TB. Si denota con $\mathfrak{X}_V(\mathbb{B})$ lo $\mathcal{F}(B)$-sottomodulo di $\mathfrak{X}_V(B)$ costituito da tutti i campi vettoriali verticali di $\mathbb{B}$.

Una carta fibrata di $V\mathbb{B}$ verrà denotata con $\Psi_V = (\mu^{-1}(U), x^\alpha, y^a, v^a)$.

Siano M, $F \in$ Man e G un gruppo di Lie. Per *fibrato* su M con gruppo di struttura G e fibra standard F s'intende una quintupla $(F, M, \pi; G, F)$, dove $\pi : B \longrightarrow M$ è una summersione, che soddisfa alle seguenti proprietà:

i) G agisce effettivamente e differenziabilmente;

ii) Esistono un ricoprimento aperto $\{\underline{U}_\alpha\}$ di M ed omeomorfismi

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(\underline{U}_\alpha) \longrightarrow \underline{U}_\alpha \times F$$

(chiamati trivializzazioni locali) tali che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} \phi_\alpha : \pi^{-1}(\underline{U}_\alpha) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \underline{U}_\alpha \times F \arrow[dl, "pr"] \\ & \underline{U}_\alpha & \end{tikzcd}$$

iii) Esistono delle mappe $m_{\alpha\beta} : \underline{U}_\alpha \cap \underline{U}_\beta = \underline{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow G$

(chiamate *funzioni di transizione*) tali che risulti $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(p,f) = (p, m_{\alpha\beta}(p) \circ f)$ $\forall\, p \in \underline{U}_{\alpha\beta}$; $f \in F$.

Le $m_{\alpha\beta}$ formano un *cociclo* a valori in G, cioè esse hanno le seguenti proprietà:

$$(m_{\alpha\beta}(p))^{-1} = m_{\beta\alpha}(p)\,; \quad m_{\alpha\beta}(p) \circ m_{\beta\gamma}(p) \circ m_{\gamma\alpha}(p) = Id_G \quad \forall\, p \in \underline{U}_{\alpha\beta\gamma}\,.$$

Un gruppo di Lie G agisce naturalmente su se stesso. Si possono quindi costruire dei fibrati che abbiano come fibra standard il proprio gruppo strutturale G e per azione, l'azione naturale di G su se stesso. Essi vengono denotati con $\mathbb{P} = (P, M, \pi; G)$ e sono chiamati *fibrati principali*.

Un modo per determinare se $\mathbb{P}$ è un fibrato principale è dato dal seguente criterio:

$\mathbb{P}$ è un fibrato principale se e solo se

i) G è un gruppo di Lie, M , P $\in$ Man e $\pi : P \longrightarrow M$ è una mappa suriettiva di rango massimo.

ii) Esiste un'azione destra **R**: $P X G \longrightarrow P$ che è libera, differenziabile e tale che

$$M = P/G \quad (\forall\, p \in P, g \in G\,;\ \pi(\mathbf{R}(p,g)) = \pi(p)).$$

Sia $\mathbb{P}$ un fibrato principale, F $\in$ Man e $\rho : G \longrightarrow Diff(F)$ una rappresentazione di G sul gruppo Diff(F) dei diffeomorfismi di F. Componendo la mappa ρ con le funzioni di transizione di $\mathbb{P}$, si hanno delle funzioni di transizione

$$\underline{m}_{\alpha\beta} : \underline{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow Diff(F)$$

che formano un cociclo in Diff(F) e quindi permettono di costruire un fibrato su M con gruppo di struttura Diff(F) e fibra standard F .

Un modo alternativo di costruire questo fibrato è quello di quozientare la varietà P X F $\in$ Man con la relazione di equivalenza definita da

$$\rho : P \times F \times G \longrightarrow P \times G \; ; \; \rho(p,f,g) \longrightarrow (pg, \rho(g^{-1})f)$$

Al fibrato $(P \times F, M, \pi_F)$ cosi ottenuto, dove π_F rappresenta la proiezione canonica, viene dato il nome di *fibrato di oggetti di tipo ρ associato* a $\mathbb{P}$.

<u>Esempio</u> - Sia $\mathbb{P}$ un fibrato principale. Se G ammette una rappresentazione $\lambda : G \longrightarrow GL(V)$ nel gruppo lineare di un certo spazio vettoriale, si puo` costruire un fibrato avente V come fibra standard e $\lambda(G)$ come gruppo di struttura. Questi fibrati vengono chiamati *fibrati vettoriali* su M.

Siano ora $\mathbb{B} = (B, M, \pi)$ una varietà fibrata e σ e μ due sezioni di $\mathbb{B}$. Per $x \in M$ si scelga una carta fibrata (U, x^α, y^a). Sia k un intero positivo. Diciamo che σ e μ sono *k-equivalenti* in $x \in M$ se e solo se

$$\sigma(x^\alpha) = \mu(x^\alpha) \; ; \; \partial_{\underline{\beta}}^{|\beta|}\sigma(x^\alpha) = \partial_{\underline{\beta}}^{|\beta|}\mu(x^\alpha)$$

dove con $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ intendiamo un multi-indice tale che $0 \leqslant |\underline{\beta}| = \beta_1 + \dots + \beta_m \leqslant k$.

Questa è una relazione di equivalenza in $\Gamma(\pi)$, la cui classe di equivalenza per $\sigma \in \Gamma(\pi)$ è indicata con $j_x^k\sigma$ ed è chiamata il *k-getto* di σ in $x \in M$.

Formiamo la collezione $J^kB = \bigcup j_x^k\sigma$ con l'unione estesa a tutti gli $x \in M$ ed ai $\sigma \in \Gamma(\pi)$, che è detta *l'estensione ai k-getti della varietà* B. Si pone $J^0B = B$. Per ogni intero l, con $0 \leqslant l \leqslant k$ esistono poi le mappe naturali $\Pi_l^k : J^kB \longrightarrow J^lB$ che sono ben definite poichè le sezioni che sono k-equivalenti in un punto sono anche l-equivalenti nello stesso punto se $l \leqslant k$. In particolare $\Pi_k^k = Id : J^kB \longrightarrow J^kB$ e $\Pi_0^k : J^kB \longrightarrow J^0B$. Posto $\Pi \circ \Pi_0^k = \Pi^k$ con $\Pi^k : J^kB \longrightarrow M$ si ha che la terna

$$\mathbb{J}^k\mathbb{B} = (J^kB, M, \Pi^k)$$

ha quindi la struttura di varietà fibrata su M; le mappe Π_l^k definiscono delle fibrazioni intermedie.

Per ogni sezione $\sigma \in \Gamma(\pi)$ viene automaticamente indotta una sezione $j^k\sigma$ di $J^k B$, chiamata *prolungamento* all'ordine k di σ, nel seguente modo :

$$j^k\sigma : \underline{U} \longrightarrow J^kB \quad ; \quad j^k\sigma(x^\alpha) = j_x^k\sigma$$

L'insieme delle sezioni di $J^k B$ viene denotato con $\Gamma(\pi^k)$.

Si rappresenta una carta fibrata Ψ^k di $J^k B$, indotta dalla carta Ψ di B, nel seguente modo $\Psi^k = ((\pi^k)^{-1} U, x^\alpha, y^a{}_\beta)$.

La proiezione canonica $\Pi^k : J^kB \longrightarrow M$ è data da espressioni locali del tipo $x^\alpha(\underline{\Psi}) \circ \pi^k = x^\alpha(\Psi^k)$ e le coordinate fibrate $y^a{}_\beta(\Psi^k)$ sono definite dalla richiesta che, per ogni sezione locale $\sigma \in \Gamma(\pi)$, risulti

$$y^a{}_\beta(\Psi^k) \circ j^k\sigma = (\partial_1(\underline{\Psi}))^{\beta 1} \dots (\partial_m(\underline{\Psi}))^{\beta m} (y^a(\Psi) \circ \sigma)$$

dove con $(\partial_m(\underline{\Psi}))^{\beta m}$ si denota la β_m-esima potenza del campo vettoriale coordinato $\partial_m(\underline{\Psi})$, considerato come derivazione dell'algebra $\mathcal{F}(\underline{U})$.

Si nota che per ogni intero $k \geq 0$ esiste un'isomorfismo canonico

$$I^k : J^k(V(B)) \longrightarrow V(J^k B)$$

di fibrati vettoriali su $J^k B$.

Utilizzeremo nel testo la notazione $< | >$, che indica la valutazione di forme a valori vettoriali su campi vettoriali verticali (per ogni $J^k B$).

I tensori sulle varietà $J^k B$ saranno sempre rappresentati tramite le loro componenti rispetto alle basi locali naturali $(dx^\alpha(\Psi^k), dy^a{}_\beta(\Psi^k))$ e $(\partial_\alpha(\Psi^k), \partial_a{}^\beta(\Psi^k))$ indotte dalle carte fibrate Ψ di B. D'ora in poi ometteremo la dipendenza dalle carte Ψ^k.

Per le 1-forme $dy^a{}_{\underline{\beta}} \in \Omega^1(J^k B)$ ed i campi vettoriali $\partial_a{}^{\underline{\beta}} \in \mathcal{X}(J^k B)$ utilizzeremo le seguenti convenzioni, per alleggerire i calcoli dei fastidiosi fattoriali che provengono dalla richiesta di simmetria delle derivate parziali:

$$dy^a = dy_{\underline{0}}{}^a \ ; \ dy^a{}_{\underline{\beta}1\ldots\,\underline{\beta}s} = dy^a{}_{1\underline{\beta}1+\ldots+\,1\underline{\beta}s} \qquad 1 \leqslant s \leqslant k$$

dove

$\underline{\beta}! = (\underline{\beta}_1!)(\underline{\beta}_2!)\ldots(\underline{\beta}_m!)$; $W(\underline{\beta}) = (|\underline{\beta}|)!/(\underline{\beta}!)$;
$1_\beta = (0,\ldots,1,\ldots0)$ (1 nella β - esima posizione)
$\beta + \lambda = (\beta_1 + \lambda_1,\ldots, \beta_m + \lambda_m)$

e si avrano le relazioni

$\partial_a = \partial_a{}^{\underline{0}}$; $\partial_a{}^{\beta_1\ldots\beta_s} = W(\beta_1,\ldots,\beta_s)\, \partial_a{}^{1\beta_1+\ldots+\,1\beta_s}$;
$\partial_a{}^{\beta_1\ldots\beta_s} \rfloor dy^b{}_{\lambda_1\ldots\lambda_s} = \delta_a{}^b \delta(\beta_1\ldots\beta_s)_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$.

§ I.II - STRUTTURE ASSOCIATE A VARIETA` FIBRATE ED AI SUOI PROLUNGAMENTI

Le estensioni ai k-getti delle sezioni $\sigma \in \Gamma(\pi)$ possono essere caratterizzate convenientemente in termini di opportune forme differenziali su J^kB. Sia $\Theta \in \Omega^1(J^k B)$ una 1-forma su J^kB, $k \geqslant 1$.

Θ è chiamata *1-forma di contatto* per la proiezione Π^k se

$$(j^k \sigma)^* \Theta = 0$$

per ogni $\sigma \in \Gamma(\pi)$. Qui $*$ rappresenta l'operazione di pullback.

Per ogni carta fibrata Ψ di $\mathbb{B}$ si definisce un insieme

$$\{\Theta^b, \ \Theta^b_{\lambda}, \dots, \Theta^b_{\lambda 1 \dots \lambda k-1}\}$$

dove

$$\Theta^b = dy^b - y^b_\rho dx^\rho, \dots, \Theta^b_{\lambda 1 \dots \lambda s} = dy^b_{\lambda 1 \dots \lambda s} - y^b_{\lambda 1 \dots \lambda s \rho} dx^\rho,$$

che genera tutte le 1-forme di contatto. Analogamente si definiscono le *p-forme di contatto*.

Sia $\omega \in \Omega^p(J^k B)$. ω è *orizzontale* se e solo se

$$\Xi \rfloor \omega = 0 \ , \ \forall \Xi \in \mathcal{X}_V(B)$$

Per ogni p-forma $\omega \in \Omega^p(J^k B)$ esiste un'unica decomposizione invariante

$$(\Pi_k^{k+1})^* \omega = \mathrm{Hor}\, \omega + C(\omega)$$

dove Hor ω è orizzontale, ed è chiamata la parte orizzontale di ω, e $C(\omega)$ è la parte di contatto.

Se $f \in \mathcal{F}(J^k B)$, allora

$$Df = d((\Pi_k^{k+1})^* f) = D^{k+1}{}_\rho\, ((\Pi_k^{k+1})^* f) dx^\rho$$

è una 1-forma orizzontale ed è chiamata *differenziale formale* di f. L'operatore

$$D^{k+1}{}_\rho = \partial_\rho + y^b{}_\rho \partial_b + \ldots + y^b{}_{\beta 1 \ldots \beta k \rho}\, \partial_b{}^{\beta 1 \ldots \beta k}$$

viene chiamato *derivata parziale formale* rispetto alle coordinate x^ρ.

Si dice *prodotto fibrato* di $J^k B$ per $J^l B'$ su M il sottoinsieme di $J^k B X J^l B'$ dato dalla

$$J^k B \, X_M \, J^l B' = \{(p,p') \in J^k B \, X \, J^l B' |\ \Pi^k(p) = \Pi'^l(p')\}$$

Consideriamo ora la seguente famiglia di fibrati vettoriali su M, che spesso saranno utilizzati nel testo:

$$\Lambda^q\, T^*M \otimes \Lambda^p\{\, V^*(J^k B)\, \}$$

dove (q,p,k) sono interi non negativi e V^* rappresenta il duale del fibrato verticale.

Per ogni intero $k \leq h$ si possono utilizzare le proiezioni canoniche $\Pi_k{}^h$ e Π^h per identificare, tramite il pullback, il fibrato sopra scritto con un sottofibrato vettoriale $\Phi_q{}^p(\Pi_k{}^h)$ di $\Lambda^{q+p}\, T^*(J^h B)$.

Ogni morfismo fibrato (locale)

$$f : J^h B \longrightarrow \Lambda^q\, T^*M \otimes \Lambda^p\{\, V^*(J^k B)\, \}$$

sulla proiezione $\Pi_k{}^h$ puo` essere canonicamente identificato con una sezione (locale) del fibrato $\Phi_q{}^p(\Pi_k{}^h)$, cioè con una data (p+q)-forma su $J^h B$. Questo procedimento che verrà molto utilizzato nel testo, viene inteso come un metodo per *rappresentare forme con morfismi* [4].

Definiremo ora delle opportune strutture geometriche le quali ci permetterano di introdurre in modo corretto alcuni concetti che vengono utilizzati in una teoria di campo covariante. Queste strutture sono i *fibrati di oggetti geometrici*, anche noti come *fibrati naturali*. Su di essi possiamo definire in modo intrinseco un *rilevamento* [5], tramite la quale riusciremo a definire la derivata di Lie per le sezioni.

Sia $P_0(\mathbb{R}^n)$ lo pseudo-gruppo definito da

$$P_0(\mathbb{R}^n) = \{ \phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n) |\ \phi(0) = 0 \}$$

Si puo' inoltre costruire la struttura

$$G^s(n;\mathbb{R}) = \{ j^k \phi \mid \phi \in P_0(\mathbb{R}^n)\}$$

che è l'insieme quoziente di $P_0(\mathbb{R}^n)$ sotto la relazione di equivalenza che definisce i k-getti. $G^s(n;\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie rispetto alla legge di composizione naturale $j^k\phi \circ j^k \phi' = j^k(\phi \circ \phi')$.

Sia $\{\underline{U}_\alpha\}$ un atlante di M. Se $\underline{U}_\alpha \cap \underline{U}_\beta = \underline{U}_{\alpha\beta}$, le funzioni di transizione $\Phi_{\alpha\beta} \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$ definite da

$$\Phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\beta(\underline{U}_{\alpha\beta}) \longrightarrow \phi_\alpha(\underline{U}_{\alpha\beta})$$

permettono, per ogni $p \in \underline{U}_{\alpha\beta}$, di costruire un diffeomorfismo locale $\underline{\Phi}_{\alpha\beta}(p) \in P_0(\mathbb{R}^n)$, definendo

$$\underline{\Phi}_{\alpha\beta}(p) : x \longrightarrow \Phi_{\alpha\beta}(x + \phi_\beta(p)) - \phi_\alpha(p)$$

ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x + \phi_\beta(p) \in \phi_\beta(\underline{U}_{\alpha\beta})$.

Ora, per ogni $\underline{U}_{\alpha\beta}$ ed ogni $s \geqslant 0$ si possono definire le funzioni

$$\mathcal{Z}^s{}_{\alpha\beta} : \underline{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow G^s(n;\mathbb{R}) \; ; \; \mathcal{Z}^s{}_{\alpha\beta} : p \longrightarrow j^s\underline{\Phi}_{\alpha\beta}(p).$$

Le $\mathcal{Z}^s{}_{\alpha\beta}$ formano un cociclo a valori in $G^s(n;\mathbb{R})$. Per costruire un fibrato su M assegniamo una fibra standard $F \in \mathrm{Man}$, sulla quale agisca effettivamente e differenziabilmente un gruppo di Lie G ed assegniamo inoltre un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : G^s(n;\mathbb{R}) \longrightarrow G$.

OSTRUZ ?

Le mappe $m_{\alpha\beta} : \underline{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow G$; $m_{\alpha\beta} = \rho \circ \mathcal{Z}^s{}_{\alpha\beta}$ permettono di rilevare le strutture differenziabili di M sulle funzioni di transizione a valori in G ed il fibrato costruito tramite queste mappe viene denotato con

$$\underline{B}_\rho = (B, M, \pi, F, G, \rho)$$

e viene chiamato *fibrato di oggetti geometrici di tipo* ρ (ed ordine s). Questo fibrato è associato al *fibrato principale degli s - riferimenti*, definito dalla quaterna

$$\mathbb{L}^sM = (L^sM, M, \pi^s; G^s(n;\mathbb{R})).$$

Qui L^sM è l'insieme di tutti i getti j^sh in $0 \in \mathbb{R}^n$, dove $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, M)$ tale che h^{-1} esiste; $\pi^s : L^sM \longrightarrow M$; $\pi^s(j^sh) = h(0)$ è la proiezione canonica, $M \in \mathrm{Man}$ e $G^s(n;\mathbb{R})$ è il gruppo di struttura, la cui azione a destra su L^sM è data dalla $j^s(h) \circ j^s(v) = j^s(h \circ v)$.

<u>Esempi</u> - TM (che ha ordine $s=1$); $\mathbb{U}(M)$, che è il fibrato delle connessioni su M (il quale ha invece ordine $s=2$). Se $\mathbb{B}$ è un fibrato di oggetti geometrici i suoi fibrati tensoriali, verticali e le sue estensioni ai getti sono anche fibrati di oggetti geometrici.

Mostreremo ora che è possibile costruire un funtore covariante che rileva in modo intrinseco e canonico le $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ ad ogni fibrato di oggetti geometrici (di tipo ρ ed ordine s) [5].

E` noto che per fibrati degli s - riferimenti esiste un tale funtore che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} L^sM & \xrightarrow{L^s\phi} & L^sM \\ \pi^s \downarrow & & \downarrow \pi^s \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

Il rilevamento $L^s : \phi \longrightarrow L^s \phi$ definisce un funtore dalla categoria delle varietà differenziabili con diffeomorfismi locali alla categoria dei fibrati principali con isomorfismi locali di fibrati principali.

Questa costruzione puo` essere estesa ad ogni fibrato naturale $\mathbb{B}$ nel seguente modo:

$\mathbb{B}$ è associato ad L^sM dalla proiezione canonica

$$\pi_\rho : L^sM \times F \longrightarrow B$$

definita dall'azione ρ. Denotando con β la proiezione

$$\beta : L^sM \times F \longrightarrow L^sM$$

l'automorfismo

$$A_\rho : B \longrightarrow B$$

dato dalla

$$A_\rho(\phi) : \pi_\rho(j^s h, f) \longrightarrow \pi_\rho(j^s(\phi \circ h), f) \quad \forall\, (j^s h, f) \in L^s M \times F$$

fa si che il seguente diagramma commuti.

$$\begin{tikzcd}
 & L^sM \times F \arrow[rrr, "L^s\phi \times Id_F"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dddl, "\pi_\rho"'] & & & L^sM \times F \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dddr, "\pi_\rho"] & \\
 & & L^sM \arrow[r, "L^s\phi"] \arrow[d, "\pi^s"'] & L^sM \arrow[d, "\pi^s"] & & \\
 & & M \arrow[r, "\phi"] & M & & \\
B \arrow[uurr, "\pi"] \arrow[rrrrr, "A_\rho"] & & & & & B \arrow[uull, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

A_ρ è ben definito perchè L^s commuta con l'azione del gruppo $G^s(n;\mathbb{R})$, ed in piu` si ha:

$$A_\rho(Id) = Id \; ; \; A_\rho(\phi_1 \circ \phi_2) = A_\rho(\phi_1) \circ A_\rho(\phi_2)$$

Se $B = A_\rho(M)$, il rilevamento A_ρ è un funtore covariante dalla categoria delle varietà differenziabili con diffeomorfismi locali alla categoria dei fibrati di oggetti geometrici di ordine s con isomorfismi fibrati locali. Se $F = G^s(n;\mathbb{R})$ e $A_\rho = Id_{Gs(n;\mathbb{R})}$ è ovvio che si ritrova L^s.

Sia ora φ_t un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di M generati dal campo vettoriale $\Xi \in \mathcal{X}(M)$, e sia $\sigma : M \longrightarrow \underline{B}$ una sezione (locale) del fibrato di oggetti geometrici $\mathbb{B}$ di ordine k. La relazione

$$\sigma_t : x \in M \longrightarrow A^{-1}{}_\rho(\varphi_t)(\sigma \circ \varphi_t(x)) \;\in \pi^{-1}(x)$$

definisce una famiglia ad un parametro di sezioni locali di $\mathbb{B}$. Si puo` cosi definire la derivata di Lie del campo (locale) di oggetti geometrici σ come segue:

Se $\Xi \in \mathcal{X}(M)$ e si ponga

$$\pounds_{\Xi}\sigma : \underline{U} \longrightarrow V(\underline{B}) \; ; \; \pounds_{\Xi}\sigma(x) = d/dt(\sigma_t(x))|_{t=0}$$

Essa definisce un campo di vettori verticali su σ che soddisfa alla proprietà:

$$\pounds_{\Xi}(j^s\sigma) = j^s(\pounds_{\Xi}\sigma)$$

per ogni sezione (locale) $\sigma \in \Gamma(\pi)$ ed ogni $\Xi \in \mathcal{X}(M)$.

CAPITOLO II

§ II.I - CALCOLO DELLE VARIAZIONI SU VARIETA` FIBRATE

Nel contesto usuale si cerca di trovare, con il calcolo delle variazioni, quelle sezioni del fibrato dei campi che rendono stazionario l'integrale d'azione

$$\mathcal{A} = \int_D L\,\omega\ ,$$

denotando con L la densità lagrangiana del sistema, $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ l'elemento di volume di M e D un dominio compatto contenuto nello spazio delle variabili indipendenti M.

E` inoltre un fatto noto che le sezioni stazionarie debbono soddisfare ad un insieme di equazioni alle derivate parziali. Se i campi, con le loro derivate sino ad un ordine inferiore di una unità rispetto a quello presente nella lagrangiana, sono fissati sul bordo ∂D del dominio compatto D considerato, tale insieme di equazioni sarà il noto sistema di equazioni di Eulero-Lagrange (E-L).

Motivati dalla richiesta di covarianza generale, principio ormai generalmente accettato in fisica, si è in passato cercato di dare a tale formalismo una formulazione intrinseca. Per ottenere una formulazione intrinseca è necessario utilizzare i metodi della geometria differenziale.

Seguendo [6], si dice *problema variazionale di ordine* k l'assegnazione di:

i) una varietà fibrata $\mathcal{Q} = (Q, M, \pi)$ su M, ($\dim M = m$);

ii) un morfismo $L : J^kQ \longrightarrow \Lambda^m T^*M$ di varietà fibrate su M, detto *densità lagrangiana*.

I funzionali d'azione sono dati dalla

$$\mathcal{A}_\sigma = \int_D L \circ j^k \sigma$$

essendo D un dominio compatto contenuto in M e $\sigma \in \Gamma(\pi)$ le sezioni della varietà fibrata Q.

Risolvere il problema variazionale consiste nel trovare quelle sezioni $\sigma \in \Gamma(\pi)$ tali che la variazione prima $\delta\mathcal{A}_\sigma$ sia nulla. Queste sezioni vengono dette *sezioni critiche* per i funzionali d'azione $\mathcal{A}_\sigma$.

Il morfismo L puo' essere identificato con una sezione globale $\Phi(L)$ del fibrato vettoriale $H^0{}_m$ su $J^k Q$

$$H^0{}_m \equiv (\Pi^k)^* \Lambda^m T^*M.$$

Essa sarà quindi una m-forma orizzontale su M, che potrà essere localmente rappresentata da [4]

$$\Phi(L)\Big|_{(\pi_0{}^k)^{-1}U} = \mathcal{L}(x^\alpha, y^a{}_\beta)\, \omega$$

dove si è scelto come carta fibrata di $J^k Q$ la $\Psi^k = ((\pi^k)^{-1} U, x^\alpha, y^a{}_\beta)$. Nella stessa carta fibrata una possibile rappresentazione locale per il morfismo L è la seguente

$$L\Big|_{(\pi_0{}^k)^{-1}U} = \mathcal{L}(x^\alpha, y^a{}_\beta) \otimes \omega$$

con $\mathcal{L} \in \mathcal{F}((\pi_0{}^k)^{-1}U)$.

Come prima, le sezioni critiche σ di un problema variazionale sono caratterizzate da un insieme di equazioni alle derivate parziali di ordine 2k nell'incognita σ, dette equazioni di E-L di L. Queste equazioni hanno la ben nota forma locale

$$e_a(L) = \sum_{|\rho| \leq k} (-1)^{|\rho|} D_\rho(\partial_a{}^\rho(\mathcal{L})) \tag{2.1}$$

dove le D_ρ denotano la derivata formale rispetto al multi-indice ρ. Le $e_a(L)$

definiscono in effetti un'unica equazione differenziale globale in $J^{2k}Q$, data dalla

$$E(L) \circ j^{2k}\sigma = \underline{0}$$

essendo $E(L)$ l'applicazione definita localmente da (2.1),

$$E(L): J^{2k}Q \longrightarrow \Lambda^m T^*M \otimes_Q V^*(Q)$$

dove $\underline{0}$ è la sezione nulla (che è globale poichè $\Lambda^m T^*M \otimes_Q V^*(Q)$ è un fibrato vettoriale).

$E(L)$ viene detto morfismo di E-L associato alla densità lagrangiana L [7]. A questo morfismo puo' venire associata una (m +1)-forma $\Phi(E(L))$ su $J^{2k}Q$, che ha la seguente espressione locale nella carta fibrata Ψ di Q [4]

$$\Phi(E(L))\Big|_U = e_a(L)\theta^a \wedge \omega$$

dove $\theta^a = dy^a - y^a_\rho dx^\rho$ è la 1-forma di contatto.

Osserviamo ora che questo fin qui descritto non è l'unico modo di presentare il problema variazionale in modo intrinseco. Esiste un altro modo importante, ad esso equivalente e già noto dalla meccanica, che si basa sull'uso della forma di Poincarè- Cartan (P- C).

L'estensione alle teorie di campo del concetto di forma di Poincarè- Cartan è stata motivata dal suo fondamentale ruolo nello studio delle relazioni tra le formulazioni lagrangiana ed hamiltoniana della dinamica, nonchè in tutti gli approcci moderni alla formulazione intrinseca di concetti fisici di base, come simmetrie e leggi di conservazione. L'esistenza della forma globale di P- C è strettamente collegata all'esistenza di un morfismo globale

$$f(L): J^{2k-1}Q \longrightarrow \Lambda^{m-1} T^*M \otimes V^*(J^{k-1}Q)$$

su $J^{k-1}Q$ che renda globalmente vera la relazione

$$TL\circ j^k v = \langle E(L)\circ j^{2k}\sigma | v\rangle + d\langle f(L)\circ j^{2k-1}\sigma | j^{k-1}v\rangle \qquad (2.2)$$

per ogni σ ed ogni sezione v di $V(Q)$ proiettabile su σ, nota come *formula della variazione prima globale per* L. Si puo' infatti, in tale ipotesi, associare al morfismo $f(L)$ una m-forma $\Phi(f(L))$ su $J^{2k-1}Q$, la quale risulta essere una forma di contatto [4]. La m-forma globale $\Theta(f,L)$ definita su $J^{2k-1}Q$ dalla

$$\Theta(f,L) = (\Pi_k^{2k-1})^*\Phi(L) + \Phi(f)$$

viene detta *m-forma globale di P- C.* E' noto [8] che per ogni connessione lineare Γ sulla base M si puo' costruire un morfismo $f(L, \Gamma)$ globale, che soddisfa alla relazione (2.2) voluta.

NOTA - La forma di P- C è univocamente definita nei casi

$k=1; m=1$	meccanica
$k=1; m>1$	teoria dei campi del primo ordine
$k>1; m=1$	meccanica di ordine superiore

non essendo univocamente definita nel caso generale di una teoria dei campi di ordine superiore. La non unicità della forma di P - C proviene dalla non unicità del morfismo $f(L, \Gamma)$.

Infatti il morfismo globale dato dalla

$$\mathbf{f} = f + \mathrm{Div}\,\mathbb{G}$$

dove Div indica la divergenza formale e $\mathbb{G}$ un morfismo fibrato tale che

$$\mathbb{G} : J^{2k-2}Q \longrightarrow \Lambda^{m-2}T^*M \otimes V^*(J^{k-1}Q)$$

soddisfa anch'esso alle condizioni richieste.

La formulazione alternativa del problema variazionale puo' ora essere formulata come segue :

Per ogni forma di P-C $\Theta(f,L)$, una sezione $\sigma \in \Gamma(\pi)$ è una sezione critica se e solo se [4], [9]

$$(j^{2k-1}\sigma)^*(\Xi \rfloor d\Theta(f,L)) = 0 \; ; \quad \forall\, \Xi \in \mathcal{X}_V(J^{2k-1}Q).$$

Localmente, per una carta fibrata Ψ di Q e per ogni densità lagrangiana L, una m-forma di P-C è data da un'espressione del tipo :

$$\Theta(L)\big|_U = \mathcal{L}\,\omega + \left\{ f_a^{\lambda}\,\theta^a + \textstyle\sum_{s=1}^{k-1} f_a^{\mu_1\ldots\mu_s\lambda}\,\theta^a_{\mu_1\ldots\mu_s} \right\} \wedge \omega_\lambda$$

dove i coefficienti

$$f_a^{\mu_1\ldots\mu_s\lambda} \in \mathcal{F}(\,(\pi_0^{2k-1})^{-1}U)$$

che sono i coefficienti del morfismo $f(L,\Gamma)$, sono definiti dalle

$$f_a^{\mu_1\ldots\mu_{k-1}\lambda} = \partial\mathcal{L}/\partial y^a_{\mu_1\ldots\mu_{k-1}\lambda} = \partial_a^{\mu_1\ldots\mu_{k-1}\lambda}\,\mathcal{L}$$

$$f_a^{\mu_1\ldots\mu_s\lambda} = \partial_a^{\mu_1\ldots\mu_s\lambda}\,\mathcal{L} + \textstyle\sum_{r=1}^{k-s-1}(-1)^r\, D_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\,\partial_a^{\mu_1\ldots\mu_s\lambda\sigma_1\ldots\sigma_r}\,\mathcal{L}$$

Mostriamo con un esempio quest'equivalenza.

Esempio - Consideriamo il caso di teorie di campo del primo ordine. In questo caso k=1 e m=4. La densità lagrangiana è un morfismo

$$L : J^1Q \longrightarrow \Lambda^4 T^*M$$

Il fibrato J^1Q è parametrizzato da $(x^\alpha, y^b, y^b{}_\beta)$ con $\alpha, \beta = 0,1,2,3$; $b=1,\ldots,\dim Q-4$.

L'integrale d'azione è dato da

$$\mathcal{A}_\sigma = \int_D (j^1\sigma)^* L\, \omega\, , \qquad (2.3)$$

Il principio di minima azione dice che [6]

$$\delta\mathcal{A}_\sigma = \int_D \pounds_{j^1X} (L\, \omega) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}_V(Q).$$

Ora

$$j^1X = X^a\partial_a + (\partial_\mu X^a + \partial_b X^a y^b{}_\mu)\partial^\mu{}_a$$

Poichè solo la parte verticale di X è rilevante si ha:

$$\pounds_{j^1X} (L\, \omega) = X^a\{ \partial_a L\, \omega - d(\partial^\mu{}_a L) \wedge \omega_\mu \} + d(\partial^\mu{}_a L X^a \omega_\mu) - \partial_a X^a \partial^\mu{}_a L\, \theta^b \wedge \omega_\mu$$

dove $\theta^b = dy^b - y^b{}_\rho dx^\rho$.

Quindi l'integrale d'azione è stazionario quando sulle soluzioni si ha

$$d_\mu(\partial^\mu{}_a L) - \partial_a L = 0.$$

D'altra parte, basandosi sul problema variazionale dato dalla forma di P- C; si ricava che esso è soddisfatto se e solo se

$$(j^1\sigma)^*(\Xi \,\lrcorner\, d\Theta^*) = 0\, ;\ \forall\, \Xi \in \mathcal{X}_V(J^1Q)\, ,$$

dove con Θ^* abbiamo indicato che la forma di P - C è relativa a una lagrangiana del primo ordine. In coordinate locali Θ^* è data dalla

$$\Theta^* = \partial^{\mu}{}_a L\, dy^a \wedge \omega_{\mu} + (L - \partial^{\mu}{}_a L\, y^a{}_{\rho})\omega \tag{2.4}$$

e quindi

$$d\Theta^* = \{- \partial_{\mu}(\partial^{\mu}{}_a L) + \partial_a L - y^b{}_{\mu}\, \partial_a(\partial^{\mu}{}_b L)\}\, dy^a \wedge \omega_{\mu} \quad + \partial_b(\partial^{\mu}{}_a L)\, dy^b \wedge dy^a \wedge \omega_{\mu}$$

$$+ \partial^{\nu}{}_b(\partial^{\mu}{}_a L)\, dy_{\nu}{}^b \wedge dy^a \wedge \omega_{\mu}$$

Ora, per $\Xi \in \mathcal{X}_V(J^1Q)$ si avrà:

$$\Xi = \Xi^a \partial_a + \Xi^a{}_{\mu} \partial^{\mu}{}_a$$

Quindi $\Xi \,\lrcorner\, d\Theta^*$ fornisce le equazioni

$$d_{\mu}(\partial^{\mu}{}_a L) - \partial_a L = 0 \;; \quad \partial^{\nu}{}_b(\partial^{\mu}{}_a L)(\partial_{\mu} y^a - y_{\mu}{}^a) = 0$$

che valutate sull'1-getto delle sezioni y^a forniscono le note equazioni di E - L.

§ II.II - CONCETTO D'ENERGIA NELLE TEORIE GEOMETRICHE DI CAMPO

Quando si ha a che fare con teorie lagrangiane di campo, in generale si assume l'invarianza della lagrangiana stessa, il che è piu' forte del richiedere l'invarianza delle equazioni di campo da essa soddisfatte. Il fatto di richiedere l'invarianza della lagrangiana ci permette di generare una intera famiglia di leggi di conservazione naturali.

DEFINIZIONE - Una *teoria geometrica di campo* è una teoria tale che si abbia:
i) Un principio variazionale $(\mathbb{Q}, L)$ il cui spazio delle configurazioni $\mathbb{Q}=(Q,M,\pi)$ sia un fibrato di oggetti geometrici (di ordine s);
ii) Che la lagrangiana (di ordine k) sia covariante, ovvero

$$TL \circ \pounds_X(j^k\sigma) = \pounds_X(L \circ j^k\sigma) \tag{2.5}$$

L'intero r=k+s viene detto *ordine totale* della teoria.

Come esempi di teorie geometriche di campo abbiamo le teorie che vengono chiamate "teorie geometriche della gravitazione" [10]. Le teorie geometriche della gravitazione sono suddivise essenzialmente in tre classi distinte, senza pero' escludere che teorie diverse possano risultare equivalenti dal punto di vista dinamico. Per tutte le tre classi si suppone che il fibrato delle configurazioni sia del tipo

$$Q = Q_{grav} \times_M Q_{mat}$$

cioè un prodotto fibrato su M (spazio-tempo) di due fibrati di oggetti geometrici su M. I campi materiali e gravitazionali sono dati dalle sezioni dei fibrati Q_{mat} e Q_{grav} rispettivamente.

Vediamo ora le proprietà di queste tre classi, nonchè la loro classificazione.

i) *Teorie puramente metriche.* In questo caso

Q_{grav} = $\mathbb{G}$ è il fibrato delle metriche lorentziane su M.

$B = J^2\mathbb{G} \times_M J^1 Q_{mat}$ è il fibrato sul quale è definita la lagrangiana, che è del tipo

$$L_{metr}(j^2g; j^1\phi) = L_{grav}(j^2g) + L_{mat}(j^1g, j^1\phi) \ ,$$

dove si è applicato il principio del minimo accoppiamento per "spezzare" la lagrangiana in due parti.

Le due lagrangiane L_{grav} e L_{mat} sono entrambe covarianti.

<u>Esempio</u> - Teoria della relatività generale, dove la lagrangiana è data dalla nota espressione

$$L_{grav} = C\mathbf{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(j^2g) \ ; \ \mathbf{g}^{\mu\nu} = (-g)^{1/2}g^{\mu\nu}$$

dove abbiamo indicato con $R_{\mu\nu}(j^2g)$ il tensore di Ricci relativo alla metrica g e con $C = \pm c^4/16\pi G$ la costante di accoppiamento gravitazionale.

ii) *Teorie puramente affini.* Per queste teorie si ha

Q_{grav} = $\mathbb{L}(M)$, fibrato delle connessioni lineari (eventualmente simmetriche) su M. La lagrangiana, definita su

$$B = J^1\,\mathbb{L}(M) \times_M J^1 Q_{mat},$$

è del tipo

$$L_A = L_A(j^1\Gamma; j^1\phi)$$

ed è supposta covariante.

Esempio - Teoria puramente affine di Eddington, la cui lagrangiana è data da

$$L_{Ed} = -(\lambda)^{-1}|\mathrm{Det}(K_{\mu\nu}(j^1\Gamma))|^{1/2},$$

indicando con $K_{\mu\nu}(j^1\Gamma)$ la parte simmetrica del tensore di Ricci della connessione Γ ed essendo $\lambda \neq 0$ una costante.

iii) *Teorie metrico - affini*: Per esse abbiamo

$$Q_{grav} = \mathbb{U}(M) \times_M \mathbb{G} \; ; \; B = J^1[\,\mathbb{U}(M) \times_M \mathbb{G}\,] \times_M J^1 Q_{mat}$$

e la lagrangiana è del tipo

$$L_{MA}(j^1g\,; j^1\Gamma; j^1\phi) = L_{grav}(j^1g, j^1\Gamma) + L_{mat}(g, \Gamma, j^1\phi).$$

dove gli addendi sono entrambi covarianti.

Esempio - Metodo variazionale cosidetto di Palatini, per il quale la lagrangiana è data da

$$L_{MA}(j^1g\,; j^1\Gamma; j^1\phi) = C g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(j^1\Gamma) + L_{mat}(g, \Gamma, j^1\phi).$$

Con opportune scelte di L_{mat} e per connessioni Γ simmetriche, le tre formulazioni geometriche del campo gravitazionale corrispondenti ai tre esempi sopra citati risultano dinamicamente equivalenti. Una dimostrazione puo' essere trovata in [11].

Definiremo ora il concetto centrale della formulazione ADM covariante e cioè il concetto di flusso d'energia, che sara' definito, per semplicita', solo nell'ipotesi di teorie geometriche di campo.

DEFINIZIONE - Definiamo come *flusso d'energia* di L lungo un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$, la (m - 1)-forma globale data dalla seguente espressione:

$$E(L, \Gamma, X) = - \mathrm{Hor}\{ j^{2k-1}[A_\rho(X)] \rfloor \Theta(L, \Gamma)\}$$

dove le notazioni sono in accordo con quanto precedentemente scritto (in particolare A_ρ è il rilevamento (v.cap. 1)).

E' facile convincersi della consistenza di questa definizione. Infatti, prendendo come esempio le teorie di campo del primo ordine otteniamo per l'espressione della forma di P- C la (2.4) che puo' anche essere riscritta come

$$\Theta^* = p^\mu{}_a dy^a \wedge \omega_\mu - \mathcal{H}\omega$$

dove $\mathcal{H}$ è l'hamiltoniana del sistema (in quei punti dove è invertibile la $p^\mu{}_a = \partial^\mu{}_a \mathcal{L}$ rispetto alle $y^a{}_\mu$ e dove scegliamo per l'indice μ quella componente che descrive l'evoluzione temporale del sistema). Quindi la parte orizzontale di Θ^* è proprio l'energia (cambiata di segno).

Si definisce allora un funzionale

$$\underline{E} : \Gamma(\pi) \longrightarrow \Lambda^{m-1} T^*M$$

ponendo

$$\underline{E}(\sigma) = (j^{2k-1}\sigma)^* E(L, \Gamma, X).$$

Esso viene detto *flusso d'energia di σ lungo X.*

Queste (m - 1)-forme possono essere espresse localmente come segue:

$$E(\sigma) = E^{\lambda}\omega_{\lambda}$$

Determiniamo ora una espressione locale per la $E(\sigma)$. Partendo dalla (2.5) ed essendo $L \circ j^k\sigma$ una densità scalare, si ha che

$$\pounds_X(L \circ j^k\sigma) = d_{\lambda}[X^{\lambda}(L \circ j^k\sigma)].$$

Ricordando ora la formula della variazione prima (2.2), la cui espressione locale scritta in termini piu' convenienti per i nostri scopi, è data da

$$TL \circ j^k(\pounds_X\sigma) = \langle E(L) \circ j^{2k}\sigma | \pounds_X\sigma \rangle + d_{\lambda}\langle f^{\lambda} \circ j^{2k-1}\sigma | j^{k-1}(\pounds_X\sigma)\rangle \qquad (2.6)$$

e combinando opportunamente queste espressioni si ricava che

$$d_{\lambda}[E^{\lambda}(L, X, \sigma)] = - \langle E(L) \circ j^{2k}\sigma | \pounds_X\sigma \rangle \qquad (2.7)$$

dove $E^{\lambda}(L, X, \sigma)$, definita da

$$E^{\lambda}(L, X, \sigma) = \langle f^{\lambda} \circ j^{2k-1}\sigma | j^{k-1}(\pounds_X\sigma)\rangle - X^{\lambda}(L \circ j^k\sigma) \qquad (2.8)$$

è la voluta espressione locale per la $E(\sigma)$.

Dalla (2.7) si vede che, se ci restringiamo alle sezioni σ di Q che soddisfano alle equazioni di E - L, si ha

$$d_{\lambda}[E^{\lambda}(L, X, \sigma)] = 0\,; \text{ per qualunque } X \in \mathcal{X}(M)$$

che sono note come *leggi di conservazione naturali deboli* associate alla lagrangiana L.

La densità vettoriale $E^{\lambda}(L, X, \sigma)$ soddisfa alle seguenti proprietà [12]:

i) Per ogni sezione (locale) σ dello spazio delle configurazioni Q, la mappa $X \longrightarrow E^{\lambda}(L, X, \sigma)$ è un'operatore differenziale lineare di ordine uguale ad $r=k+s-1$.

ii) Per ogni campo vettoriale X su M, la mappa $\sigma \longrightarrow E^{\lambda}(L, X, \sigma)$ è un operatore differenziale di ordine 2k-1.

Queste due proprietà ci permettono di sviluppare $E^{\lambda}(L, X, \sigma)$ in termini delle componenti del prolungamento del campo vettoriale X agli r-getti. Le componenti di quest'espansione servono a definire gli pseudotensori di energia-momento e, mediante un procedimento di tensorializzazione, anche i tensori di energia-momento della densità lagrangiana L. Per questa estensione si veda [12].

E' stato inoltre dimostrato che, a livello globale, esistono una (m-2)-forma $U(L, \Gamma, X)$ globale su $J^{2k-2}Q$, e un'unica (m-1)-forma globale $\mathbb{E}(L, \Gamma, X)$ su $J^{2k-1}Q$, tali che risulti

$$E(L, \Gamma, X) = \mathbb{E}(L, \Gamma, X) + \mathrm{Div}[U(L, \Gamma, X)] \tag{2.9}$$

e che i tensori energia-momento di $\mathbb{E}(L, \Gamma, X)$ siano totalmente simmetrici [13].
Le forme $\mathbb{E}(L, \Gamma, X)$ ed $U(L, \Gamma, X)$ sono chiamate rispettivamente *flusso d'energia ridotta* e *superpotenziale*. Inoltre, la (m-2)-forma $U(L, \Gamma, X)$ non è univocamente definita, essendo l'operatore Div nilpotente.

Dalle equazioni di campo e dalla covarianza della L, segue che il flusso d'energia ridotta $\mathbb{E}(L, \Gamma, X)$ s'annulla lungo le sezioni critiche.

Effettuando il pullback di (2.9) tramite la $j^{2k-1}\sigma$, integrando sul dominio compatto $\Sigma \subset M$ (con bordo $\partial\Sigma$ avente l'orientazione indotta da M) e applicando infine il teorema di Stokes, si ha che

$$\int_\Sigma \underline{E}(\sigma) = \int_\Sigma \underline{\mathbb{E}}(\sigma) + \int_{\partial\Sigma} \underline{U}(\sigma) \tag{2.10}$$

essendo

$$\underline{E}(\sigma) = (j^{2k-1}\sigma)^*E\,; \quad \underline{\mathbb{E}}(\sigma) = (j^{2k-1}\sigma)^*\mathbb{E}; \quad \underline{U}(\sigma) = (j^{2k-2}\sigma)^*U$$

ed avendo utilizzato la relazione

$$(j^{2k-1}\sigma)^*\mathrm{Div}\, U = d[(j^{2k-2}\sigma)^*U]$$

Inoltre, lungo le sezioni critiche si avrà piu' semplicemente:

$$\int_\Sigma \underline{E}(\sigma) = \int_{\partial\Sigma} \underline{U}(\sigma)$$

Quindi *tutto il contenuto energetico di una teoria geometrica di campo, calcolato lungo le sezioni critiche, è generato dal superpotenziale.*

Esempio - Calcolo del superpotenziale per la teoria (puramente metrica) del campo gravitazionale libero secondo A. Einstein.

Si tratta di calcolare la quantità E^λ associata alla lagrangiana

$$L_{grav} = C g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(j^2 g)\,.$$

Per calcolare questa quantità si dovra' calcolare preliminarmente la forma di P - C associata alla lagrangiana, allo scopo di ottenere i coefficienti f^λ necessari.

Conviene, per facilitare i calcoli, considerare preliminarmente la lagragiana metrico-affine, equivalente da un punto di vista dinamico alla lagrangiana puramente metrica assegnata. Come prima menzionato, lo spazio in cui è definita la lagrangiana è $J^1[\,\mathbb{U}(M)\ X_M \mathbb{G}\,]$. La nostra nuova lagrangiana è allora data dalla

$$L_{grav} = C\mathbf{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(j^1\Gamma).$$

I momenti sono in questo caso dati da

$$f^\lambda = \Pi_\xi{}^{\mu\nu\lambda} = C[(\partial L/\partial R_{\beta\delta})(\partial R_{\beta\delta}/\partial \Gamma^\xi{}_{\mu\nu\lambda})] = C[\delta_\xi{}^\lambda \mathbf{g}^{\mu\nu} - \delta_\xi{}^{(\mu}\mathbf{g}^{\nu)\lambda}]\ ,$$

dove $\Gamma^\xi{}_{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda \Gamma^\xi{}_{\mu\nu}$. Poiche' ci siamo ricondotti ad una teoria del primo ordine, la 4-forma di P -C è data da

$$\Theta^* = C[\,\mathbf{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(j^1\Gamma)\omega + (\delta_\xi{}^\lambda \mathbf{g}^{\mu\nu} - \delta_\xi{}^{(\mu}\mathbf{g}^{\nu)\lambda})(d\Gamma^\xi{}_{\mu\nu} - \Gamma^\xi{}_{\mu\nu\rho}dx^\rho)\wedge\omega_\lambda\,]$$

Questa 4-forma dovrebbe essere definita a priori su $J^1[\mathbb{U}(M)X_M\mathbb{G}]$. Pero' si vede subito che essa è definita solo su $\mathbb{U}(M)X_M\mathbb{G}$. Questo fatto è spiegato dalla proposizione seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché la forma di P - C Θ^* associata ad una lagrangiana del primo ordine sia definita su Q (se Q è lo spazio delle configurazioni) anziché su J^1Q è che la lagrangiana sia omogenea nelle derivate dei campi.

La dimostrazione è facilmente ottenuta osservando quali condizioni deve soddisfare una lagrangiana del primo ordine affinchè Θ^* sia definita su Q.

Per passare della teoria metrico-affine alla teoria puramente metrica si considera l'isomorfismo

$$J^1\mathbb{G} \hookrightarrow [\mathbb{U}(M) \times_M \mathbb{G}]$$

dato dalla $\Gamma^{\xi}_{\mu\nu} = \underline{\Gamma}^{\xi}_{\mu\nu}$ dove $\underline{\Gamma}$ sono i simboli di Christoffel della metrica g.

La 4-forma di P - C per la teoria puramente metrica sarà allora

$$\Theta = C[\, \mathbf{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(j^2 g)\omega + (\delta_{\xi}{}^{\lambda} \mathbf{g}^{\mu\nu} - \delta_{\xi}{}^{(\mu} \mathbf{g}^{\nu)\lambda})(d\underline{\Gamma}^{\xi}_{\mu\nu} - \underline{\Gamma}^{\xi}_{\mu\nu\rho} dx^{\rho}) \wedge \omega_{\lambda}\,] \tag{2.11}$$

Come si vede, questa forma di P - C Θ (associata alla lagrangiana puramente metrica) non è definita su J^3Q, come dovrebbe essere a priori bensi' solo su J^1Q. Questo fatto si riflette, oltre che nella proposizione precedente e nell'equivalenza dinamica considerata sopra, nella ben nota proprieta' che le equazioni di campo per la relatività generale sono del secondo ordine in g (e non del quarto, come risulterebbero se la lagrangiana non fosse in qualche modo degenere).

Ritornando al nostro problema, una volta noti i coefficienti f^{λ} abbiamo per la $E^{\lambda}(L, \underline{\Gamma}, X)$ l'espressione

$$E^{\lambda}(L, \underline{\Gamma}, X) = C[(\mathbf{g}^{\alpha\beta} \pounds_X \underline{\Gamma}^{\lambda}{}_{\alpha\beta} - \mathbf{g}^{\lambda\phi} \pounds_X \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\alpha\phi}) - X^{\lambda} L]\,.$$

Calcolandone la derivata di Lie ed integrando per parti covariantemente rispetto alla connessione di Levi-Civita , si ottengono per $\mathbb{E}^{\lambda}(L, \underline{\Gamma}, X)$ ed $U(L, \underline{\Gamma}, X)$ le espressioni seguenti:

$$\mathbb{E}^{\lambda}(L, \underline{\Gamma}, X) = 2C\mathbf{g}^{\lambda\phi}(R_{\phi\omega} - (1/2) g_{\phi\omega} R) X^{\omega} \tag{2.12}$$

$$U^{\lambda\mu}(L, \underline{\Gamma}, X) = -2C\mathbf{g}^{\rho[\lambda} \nabla_{\rho} X^{\mu]}$$

dove con [ ] si è indicato l'antisimmetrizzazione.

Sulle sezioni critiche, l'energia del campo gravitazionale $g_{\alpha\beta}$ è quindi generata dal superpotenziale $U^{\lambda\mu}$, il quale generalizza quello già trovato da Komar [14] per vettori di Killing del tipo tempo.

CAPITOLO III

§ III.I - FORMULAZIONE ADM STANDARD

La formulazione ADM, sviluppata intorno agli anni '60 da Arnowitt, Deser e Misner [1], costituisce una delle basi concettuali per interpretare il sistema di equazioni di Einstein come un sistema si tipo hamiltoniano.

Essenzialmente essa si basa sulla ricerca di un fogliettamento locale dello spazio-tempo M , il quale induce, tramite la proiezione inversa π^{-1}, una decomposizione locale dello spazio delle configurazioni per la teoria considerata.

Localmente M è data dalla

$$M \approx \Sigma_t X I \; ; \; I \subset \mathbb{R}$$

e si sceglie il fogliettamento in modo tale che le Σ_t siano delle ipersuperfici di tipo spazio e quindi delle varietà riemanniane (giacche' M e' munita di una metrica g di segnatura lorentziana).

Con questa scelta avremo un'immersione dipendente dal parametro t, coordinata di I (detto anche *tempo*), data dalla

$$\mathbf{i}_t : \Sigma_t \longrightarrow M$$

Prendendo il pullback della metrica g di M

$$\mathbf{i}_t{}^* g = g_t$$

potremo costruire le metriche g_t su Σ_t tramite i parametri dell'immersione stessa.

L'isomorfismo

$$\mathbf{i}: \Sigma_t X\, I \longrightarrow \underline{U} \;\; ; \;\; \mathbf{i}(x^i,t) = \mathbf{i}_t(x^i)$$

con $\underline{U}$ aperto di M, permette di decomporre la metrica $g_{\mu\nu}$ nel seguente modo

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} N^i N_i - N^2 & N_i \\ & \\ N_j & g_{ji} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

Qui x^i (i=1,2,3) sono coordinate locali in Σ_t. Si pone $t=x^0$.

Le funzioni $N(x^i,t)$ e $N^j(x^i,t)$, che descrivono il modo in cui l'ipersuperficie Σ_t si deforma quando t percorre l'insieme I, sono definite dai coefficienti della decomposizione nelle sue parti normale e tangente alla Σ_t del campo vettoriale X_t, costruito con i vettori tangenti alla curva di immersioni

$$t \longrightarrow \mathbf{i}_t \, .$$

La funzione differenziabile $N(x^i,t)$, che descrive la deformazione normale della Σ_t, viene chiamata *funzione di lapse*, e la funzione $N^i(x^i,t)$, che è la parte tangente di tale decomposizione, descrive le deformazioni interne della Σ_t e viene chiamata *vettore di shift*.

L'inversa della metrica $g_{\mu\nu}$ avrà come espressione

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1/N^2 & N^i/N^2 \\ & \\ N^j/N^2 & g^{ji} - N^j N^i/N^2 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

Inotre si avrà che $(-g)^{1/2} = N(g)^{1/2}$.

Dall'analisi fin qui sviluppata risulta chiaro che le funzioni $N(x^i,t)$ e $N^i(x^i,t)$ non avranno un significato dinamico poichè rappresentano solo il modo in cui Σ_t

viene immersa in M. Esse possono venir interpretate, per esempio, come scelte di gauge, oppure moltiplicatori di Lagrange. Si vede quindi che le componenti $g_{0\mu}$ del campo gravitazionale non daranno un contributo dinamico al sistema, come del resto è stato ampiamente discusso in [15].

Come visto nel secondo capitolo, la densità lagrangiana per le teorie puramente metriche è definità su $J^2\mathbb{G}$, dove $\mathbb{G} = (G, M, \pi)$ è il fibrato delle metriche lorentziane su M. Tramite l'isomorfismo locale $\mathbf{i}$: $\Sigma_t X\, I \longrightarrow \underline{U}$ e la summersione π si puo' "fogliettare" il fibrato $\mathbb{G}$, dando luogo ad un fibrato $\mathbb{G}_{3+1} \approx \mathbb{G}$ e quindi costruire il fibrato $J^2\mathbb{G}_{3+1}$, anch'esso localmente isomorfo a $J^2\mathbb{G}$. Chiamando con ρ l'isomorfismo locale

$$\rho : J^2\mathbb{G}_{3+1} \longrightarrow J^2\mathbb{G}$$

ed effettuando il pullback di una quantità definita su $J^2\mathbb{G}$ tramite la ρ, si ottiene una quantità definita su $J^2\mathbb{G}_{3+1}$, ovvero una decomposizione 3+1 di tale quantità. Nel nostro caso, vogliamo fare una decomposizione 3+1 della lagrangiana di Hilbert

$$L_H = C\mathbf{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(j^2g) \,;\; \mathbf{g}^{\mu\nu} = (-g)^{1/2}g^{\mu\nu}$$

ottenendo

$$\rho^*L_H = C\{N(g)^{1/2}(R + K_{ij}K^{ij} - K^2) - 2\partial_t[(g)^{1/2}K] + 2\partial_i[(g)^{1/2}(KN^i - g^{ij}D_jN)]\}$$

dove le D_j, denotano le derivate covarianti definite sulle Σ_t, la K_{ij} sta ad indicare la *seconda forma fondamentale* di Σ_t, la $K = g^{ij}K_{ij}$ la traccia di K_{ij} e R lo *scalare di curvatura* relativo a Σ_t.

Come si vede, in questa nuova lagrangiana compaiono termini che contengono una divergenza ed una derivata totale rispetto al tempo. Il termine derivato rispetto al tempo non offre alcun contributo dinamico, poichè contiene le derivate temporali seconde di g^{ij} e le derivate di $N(x^i,t)$ e $N^j(x^i,t)$. Il termine sotto divergenza puo' essere a priori scartato, poichè non da nessun contributo dinamico al sistema. Quindi, effettivamente, lavoreremo su un ulteriore sottospazio di $J^2\mathbb{G}_{3+1}$, che non è pero' isomorfo allo spazio di definizione $J^1\mathbb{G}$ della nota lagrangiana "gamma-gamma", lagrangiana (non-covariante) di Hilbert-Palatini, ottenuta dalla lagrangiana di Hilbert togliendo una divergenza [16]. Tuttavia, questi termini scartati, se uniti ad altri termini provenienti dalla trasformazione di Legendre (che verrà comunque effettuata), sono ancora suscettibili di un notevole significato fisico, come sara' visto in dettaglio al quarto capitolo.

La parte quindi "utile" della nostra lagrangiana decomposta è

$$L_{ADM} = CN(g)^{1/2}(R + K_{ij}K^{ij} - K^2)$$

ed è nota come lagrangiana ADM.

L'hamiltoniana del nostro sistema sarà ottenuta tramite una trasformazione di Legendre del tipo

$$-\int L_{ADM}d^3x = \int g_{ij}\partial_t\pi^{ij}d^3x + \int(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i)d^3x \tag{3.3}$$

dove $\pi^{ij} = \partial L_{ADM}/\partial_t g_{ij}$ è il momento canonicamente coniugato al tensore metrico g_{ij} ed ha la forma $\pi^{ij} = 2(g)^{1/2}(K^{ij} - g^{ij}K)$. Le $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{H}_i$ avrano rispettivamente un'espressione

$$\mathcal{H} = (g)^{-1/2}(\pi_{ij}\pi^{ij} - 1/2\pi^2) - (g)^{1/2}R \tag{3.4}$$

$$\mathcal{H}_i = -2\,D_j\pi^{ij} \tag{3.5}$$

Nella (3.3) abbiamo omesso il termine $-2\partial_i[\pi^{ij}N_j]$, il quale viene poi riconsiderato nella gia' citata trattazione dovuta a Regge e Teitelboim. Visto che le $N(x^i,t)$ e $N^j(x^i,t)$ non hanno un significato dinamico, effettuando le variazioni di (3.3) rispetto ad $N(x^i,t)$ e $N^j(x^i,t)$, otterremo per i rispettivi momenti le equazioni $\mathcal{H} = 0$ e $\mathcal{H}_i = 0$, note come *vincolo hamiltoniano* e *vincolo sui momenti*. Esse sono equivalenti alle equazioni miste $G^0{}_\mu = 0$ (dove $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = 0$).

Consideriamo ora la

$$H = \int (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i) d^3x. \tag{3.6}$$

Nell'esplicita ipotesi che i fogli Σ_t siano compatti e senza bordo, calcolando le parentesi di Poisson

$$\partial_t g_{ij} = \{ g_{ij}, H \} \ ; \ \partial_t \pi^{ij} = \{ \pi^{ij}, H \}$$

otteniamo per equazioni del moto del sistema, un sistema di equazioni dinamiche equivalenti alle $G_{ij} = 0$. Le espressioni esplicite di queste equazioni possono essere trovate in [1].

Si è cosi ricostruito completamente il sistema di equazioni di Einstein, con un procedimento che permette di selezionare la parte dinamica di tali equazioni. In questo caso, la H fornisce tutte le informazioni sulla dinamica del campo gravitazionale, e puo' dunque essere interpretata come la vera hamiltoniana del campo gravitazionale la quale risulta nulla sullo spazio delle soluzioni esatte (presenza dei vincoli).

Nel caso in cui i fogli non siano compatti, per ottenere una formulazione hamiltoniana consistente, è invece necessario tener presente che esistono dei termini non nulli provenienti da integrali di superficie. Questi termini di bordo assumono un significato notevole quando li si considera all'infinito e su soluzioni asintoticamente piatte. Essi vengono interpretati come "gradi di libertà asintotici".

Osserviamo innanzitutto che l'espressione generale per la variazione dell'hamiltoniana è data da [2]:

$$\delta H = \int(\delta g_{ij}\partial_t\pi^{ij} - \partial_t g_{ij}\delta\pi^{ij})\omega - \oint G^{ijkl}(ND_k\delta g_{ij} - D_k N\delta g_{ik})\omega_l$$

$$- \oint\{2N_k\delta\pi^{kl} + (2N^k\pi^{jl} - N^l\pi^{jk})\delta g_{jk}\}\omega_l \qquad (3.7)$$

dove $G^{ijkl} = 1/2(g)^{-1/2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} - 2g^{ij}g^{kl})$ e' la metrica di De Witt.

Assumiamo in particolare che le funzioni di lapse e di shift abbiano un'espressione asintotica del tipo

$$N^\mu \longrightarrow \alpha^\mu + \beta^\mu{}_r X^r \quad ; \quad r \to \infty \quad ; \; (N^\mu = \eta^{\mu\nu}N_\mu \, , \, N^0 = N) \qquad (3.8)$$

essendo $\eta^{\mu\nu}$ la metrica di Minkowski. In piu' richiediamo

$$\beta_{mr} = -\beta_{rm}$$

(La (3.8) ci dice che tra le possibili deformazioni dell'ipersuperficie all'infinito spaziale abbiamo le rotazioni $\beta^m{}_r$, i boosts $\beta^\perp{}_r$ e le traslazioni α^μ). Supponiamo infine che la metrica tridimensionale abbia il seguente andamento asintotico:

$$g_{ij} - \delta_{ij} \propto r^{-1} \; ; \; \partial_k g_{ij} \propto r^{-2} \qquad (3.9)$$

Inserendo queste condizioni nella (3.7) otteniamo con Regge e Teitelboim [2]

$$\delta H = \int(\delta g_{ij}\partial_t\pi^{ij} - \partial_t g_{ij}\delta\pi^{ij})\omega + \alpha^\mu\delta P_\mu - (1/2)\beta^{\mu\nu}\delta M_{\mu\nu}$$

dove P^μ definiscono l'ipermomento ADM e le $M_{\mu\nu}$ il momento angolare. Le loro espressioni esplicite sono:

$$P^\perp = P^0 = \oint(\partial_r g_{lr} - \partial_l g_{rr})\omega_l \tag{3.10}$$

$$P^i = -2\oint \pi^{il}\omega_l \tag{3.11}$$

$$M^{rs} = -2\oint(x^r\pi^{sl} - x^s\pi^{lr})\omega_l \tag{3.12}$$

$$M^\perp{}_r = -2\oint[\, x^r(\partial_s g_{ls} - \partial_l g_{ss}) - g_{lr} + g_{ss}\delta_{lr}]\omega_l \tag{3.13}$$

La componente $P^\perp$ è anche nota come *energia ADM del campo gravitazionale*. E' stato dimostrato [17], [18] che la componente $P^\perp$ è definita positiva essendo nulla solo per lo spazio di Minkowski.

Si vede quindi che H ha derivate funzionali ben definite solo quando gli integrali di bordo (che in generale sono diversi da zero) s'annullano, ovvero quando $\alpha^\mu = \beta^{\mu\nu} = 0$. Quindi, H è una buona hamiltoniana soltanto per quelle deformazioni dell'ipersuperficie che non inducono traslazioni e rotazioni all'infinito spazio-temporale. Un modo per aggirare questo problema è quello di definire una nuova hamiltoniana H', data dalla:

$$H' = H - \alpha^\mu P_\mu - (1/2)\beta^{\mu\nu}M_{\mu\nu} \ ,$$

cioe' correggendo opportunamente la hamiltoniana originale H con l'aggiunta di opportuni termini di bordo. Questa nuova hamiltoniana avrà derivate funzionali ben definite, e genererà (quando si effettuano trasformazioni asintotiche di Poincarè tra le possibili deformazioni dell'ipersuperficie) le giuste equazioni del moto (si veda [2]).

§ III.II - FORMULAZIONE ADM COVARIANTE

Abbiamo visto che per ottenere la formulazione ADM standard si deve scegliere un fogliettamento della varietà differenziabile M, in modo tale che esso generi una famiglia continua di ipersuperfici di tipo spazio. Quindi, nella sua formulazione standard, il formalismo dipende fortemente dalla scelta del fogliettamento, e questa dipendenza porta a problemi notevoli quando si cerca di ricuperare la covarianza della teoria. Diversi approcci al formalismo ADM covariante sono stati pertanto suggeriti.

M. Ferraris e M. Francaviglia hanno recentemente proposto un'approccio covariante alternativo al problema. Esso ha il pregio di essere direttamente applicabile a teorie di campo di ordine qualsiasi ed a spazi di configurazione aventi struttura molto piu' generale di quella dei fibrati di oggetti geometrici. In questo lavoro, comunque, ci restringeremo al caso in cui lo spazio delle configurazioni sia un fibrato di oggetti geometrici, poichè in questa struttura il concetto di covarianza generale e le leggi naturali di conservazione trovano la loro piu' semplice sistemazione.Per la trattazione piu' generale il lettore puo' riferirsi a [19].

L'idea chiave di questo approccio risiede nel concetto di forma di Poincarè-Cartan associata ad una lagrangiana, e dalla richiesta di esistenza di un campo vettoriale X regolare (nel senso che esso non si annulli mai), il quale definirà un flusso di evoluzione.

Sia quindi (Q, L) un principio variazionale su un fibrato di oggetti geometrici. Scegliamo un campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(\underline{U})$, $\underline{U} \subset M$, e costruiamo il flusso d'energia $E^{\lambda}(L, X, \Gamma)$, associato a tale campo, dato dalla (2.8).

Se calcoliamo le variazioni di tale flusso lungo un vettore verticale Ξ di Q, si ricava (utilizzando al posto del simbolo di derivazione di Lie $\pounds_{\Xi}$ il simbolo piu' familiare δ) :

$$\delta E^{\lambda}(L, X, \Gamma) = <\delta f^{\lambda}|j^{k-1}(\pounds_X \sigma)> - <\pounds_X f^{\lambda}|j^{k-1}(\delta\sigma)> -$$

$$- X^{\lambda}<E(L)|(\delta\sigma)> + 2d_{\mu}\{X^{[\mu} <f^{\lambda]}|j^{k-1}(\delta\sigma)>\}. \qquad (3.14)$$

Le f^{λ} sono ancora una volta i coefficienti della forma di P - C.

Per ogni ipersuperficie Σ, con bordo regolare $\partial\Sigma$, si definisce

$$\underline{E}(\Sigma, X) = \int_{\Sigma} E^{\lambda}(L, X, \Gamma)\omega_{\lambda} \qquad (3.15)$$

come *l'energia contenuta in* Σ. Si assume inoltre che le ipersuperfici Σ siano trasverse al campo X (il che non è restrittivo, giacchè il formalismo à la ADM si basa su un fogliettamento).

Variando (3.15) lungo i campi vettoriali Ξ ed utilizzando la (3.14) si ottiene

$$\underline{E}(\Sigma, X) = \int_{\Sigma}\{<\delta f^{\lambda}|j^{k-1}(\pounds_X\sigma)> - <\pounds_X f^{\lambda}|j^{k-1}(\delta\sigma)>\}\omega_{\lambda} -$$

$$- \int_{\Sigma} X^{\lambda}<E(L)|(\delta\sigma)>\omega_{\lambda} + \int_{\partial\Sigma} X^{\mu}<f^{\lambda}|j^{k-1}(\delta\sigma)>\omega_{\lambda\mu}.$$

Supponiamo ora che sia possibile scegliere delle opportune condizioni al contorno in modo che si possa costruire una (m-2)-forma

$$\underline{\mathbf{C}} = 1/2\mathbf{C}^{\lambda\mu}\omega_{\lambda\mu}$$

tale che risulti

$$\delta \mathbf{C}^{\lambda\mu}\Big|_{\partial\Sigma} = 2\{ X^{[\mu}<f^{\lambda]}|j^{k-1}(\delta\sigma)>\}\Big|_{\partial\Sigma}. \qquad (3.16)$$

Siamo quindi in grado, sotto quest'ipotesi, di introdurre un' *hamiltoniana modificata* $\underline{H}(\Sigma, X)$ sul foglio generico ponendo:

$$\underline{H}(\Sigma, X) = \int_\Sigma E^\lambda(L, X, \Gamma)\omega_\lambda + 1/2\int_{\partial\Sigma} C^{\lambda\mu}\,\omega_{\lambda\mu} \qquad (3.17)$$

Calcolando le variazioni dell'hamiltoniana modificata si trova:

$$\underline{H}(\Sigma, X) = \int_\Sigma \{ < \delta f^\lambda | j^{k-1}(\pounds_X \sigma) > - < \pounds_X f^\lambda | j^{k-1}(\delta\sigma) > \}\omega_\lambda - \int_\Sigma X^\lambda < E(L) | (\delta\sigma) > \omega_\lambda$$

la quale non contiene termini di superficie. Quindi, se si riesce a determinare per il sistema fisico dato una (m-2)-forma $\underline{C}$ soddisfacente alle condizioni richieste, si riuscirà anche a determinare una classe di hamiltoniane ognuna delle quali soddisfacente alle condizioni asintotiche imposte.

La covarianza di questo approccio è garantita dall'indipendenza dalla natura di X e dalla segnatura dei fogli, nonchè dalla globalità della forma di Poincarè-Cartan.

Ricordandosi dell'equazione (2.10), ed inserendola nella (3.17), si ottiene per $H(\Sigma, X)$ l'espressione conveniente:

$$\underline{H}(\Sigma, X) = \int_\Sigma \mathbb{E}^\lambda(L, X, \Gamma)\omega_\lambda + 1/2\int_{\partial\Sigma} (U^{\lambda\mu} + C^{\lambda\mu})\omega_{\lambda\mu}$$

Quindi, per campi liberi e sezioni critiche, il generatore dell'hamiltoniana proviene essenzialmente dall'integrale di superficie. Dal termine $\delta C^{\lambda\mu}$, dato dalla (3.16) si vede che: *se il campo con le sue derivate fino ad un ordine* k-1 *sono fisso sul bordo* $\partial\Sigma$, *oppure se il vettore* Ξ *è una simmetria infinitesima* (cioè $\pounds_\Xi \sigma = 0$), *si ha che* $\delta \underline{H} = \delta E$, *ed i termini di superficie non danno contributo alla dinamica del sistema.*

CAPITOLO IV

APPLICAZIONI ALLA RELATIVITA' GENERALE

In questo capitolo mostreremo come il formalismo ADM covariante possa essere convenientemente applicato alla teoria della relatività generale pensata come genuina teoria del secondo ordine. Noi considereremo soltanto il caso della teoria libera poichè non ci sono difficoltà concettuali ad estendere la trattazione alla teoria accoppiata a campi materiali che sono sezioni di un opportuno fibrato di oggetti geometrici. L'applicazione di tale formalismo a teorie del primo ordine (quale per esempio l'elettromagnetismo) puo' essere trovata in [3].

La procedura si articolerà nei seguenti passi:

i) Determinazione dei coefficienti della forma di P - C associata alla lagrangiana di Hilbert.

ii) Costruzione della formula per il flusso d'energia.

iii) Scegliere la componente temporale di tale flusso d'energia ed effettuare la decomposizione 3+1 di tale formula.

iiii) Confrontare il risultato con altre hamiltoniane note.

La forma di P - C associata alla lagrangiana di Hilbert L_H e' gia' stata calcolata nel capitolo 2; essa è data dalla (2.11). Questa puo' essere ulteriormente sviluppata in modo da ottenere un'espressione piu' maneggevole ovvero

$$\Theta = C[\, \mathbf{g}^{\beta\mu} d\mathcal{U}^{\lambda}{}_{\beta\mu} \wedge \omega_{\lambda} + \mathbf{g}^{\beta\mu}(\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\beta}\, \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\, \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu})\omega \,]$$

In questo modo i coefficienti saranno le densità metriche $\mathbf{g}^{\beta\mu}$ e i campi le quantità

$$\mathcal{U}^{\lambda}{}_{\beta\mu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu} - \delta^{\lambda}{}_{(\beta}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\mu)\alpha}$$

dove $\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}$ hanno la ben nota espressione

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu} = 1/2\, g^{\lambda\rho}(\partial_\beta g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\beta\rho} - \partial_\rho g_{\beta\mu}) \qquad (4.1)$$

Possiamo sostituire le espressioni trovate nella formula per il flusso d'energia (2.8), ottenendo

$$E^{\lambda}{}_H = C[\, \mathbf{g}^{\beta\mu} \pounds_X \mathcal{U}^{\lambda}{}_{\beta\mu} - X^{\lambda} \mathbf{g}^{\beta\mu} \mathbf{R}_{\beta\mu}(j^2 g)]$$

Per costruire una hamiltoniana H_H, fisicamente significativa, associata alla lagrangiana L_H, è necessario scegliere un campo vettoriale regolare X, del genere tempo e orientato verso il futuro, in modo che i fogli del fogliettamento (locale) da esso indotto siano delle ipersuperfici del tipo spazio. Introducendo opportune coordinate questa scelta è ottenuta ponendo $X = \partial_t$. Cio' ci permetterà di scrivere

$$H_H \equiv E^0{}_H = C \int_\Sigma [\, \mathbf{g}^{\beta\mu}\, \partial_t(\mathcal{U}^0{}_{\beta\mu}) - \mathbf{g}^{\beta\mu} \mathbf{R}_{\beta\mu}(j^2 g)]\omega \ .$$

Facciamo ora la decomposizione 3+1 di questa quantità, calcolando innanzitutto, tramite la (4.1), la corrispondente decomposizione delle Γ.Per esse otteniamo

$$\Gamma^0{}_{00} = N^{-1}(\, \partial_t N + N^s D_s N - N^e N^f K_{ef})$$

$$\Gamma^0{}_{0j} = N^{-1}(D_j N - N^e K_{ej})$$

$$\Gamma^0{}_{jk} = - N^{-1} K_{jk}$$

$$\Gamma^i{}_{00} = N^{-1} N^i (N^m N^s K_{ms} - \partial_t N - N^s D_s N) + g^{mi}(\, \partial_t N_m - N^s D_m N_s + N D_m N)$$

$$\Gamma^i_{0k} = -N^{-1}N^i(D_kN - N^sK_{ks}) - NK^i_k + D_kN^i$$

$$\Gamma^i_{jk} = N^{-1}N^iK_{jk} + G^i_{jk} \tag{4.2}$$

dove G indica la connessione sul foglio Σ. K_{jk} è la seconda forma fondamentale di un generico foglio, esprimibile anche come segue

$$K_{jk} = (1/2N)^{-1}(-\partial_t g_{jk} + D_kN_j + D_jN_k)$$

Sostituendo le formule ora trovate per le connessioni nonchè le espressioni (3.1) e (3.2) per la metrica, otteniamo per il termine $g^{\beta\mu}\partial_t(U^\lambda{}_{\beta\mu})$ l'espressione:

$$g^{\beta\mu}\,\partial_t(U^0{}_{\beta\mu}) = \pi^{ij}\partial_t g_{ij} + \partial_l(N^{-1}g^{1/2}\partial_t N^l) - \partial_t(2g^{1/2}K) \tag{4.3}$$

Utilizzando ora la decomposizione 3+1 per la lagrangiana di Hilbert, e sostituendola nella formula per il flusso d'energia assieme alla (4.3), si ottiene:

$$H_H = H + C\oint\{N^{-1}g^{1/2}\partial_t N - 2[g^{1/2}(KN^l - g^{il}D_iN^l) + \pi^l{}_iN^i]\}\omega_l \tag{4.4}$$

dove H è dato dalla (3.6).(notare che non è necessario giustificare l'assenza del termine $\partial_t(2g^{1/2}K)$ poichè, in questa formulazione, esso non compare affatto).

L'integrale di superficie cosi trovato per la lagrangiana di Hilbert, e' piu' generale di quello ottenuto nella trattazione dovuta a Regge e Teitelboim; in [2] viene infatti considerato soltanto il termine $2\partial_l\pi^l{}_iN^i$. In ogni caso, anche l'integrale "completo" qui trovato <u>ha un significato fisico</u>. Esso risulta essere la quantità

$$U^{0l} = -2Cg^{\rho[0}\nabla_\rho X^{l]}\,,$$

la quale coincide con il *superpotenziale di Komar* [14] per vettori X di tipo tempo.

D'altra parte, dalla relazione (2.12) si otteneva che il flusso di energia E^λ è suscettibile anche della seguente espressione:

$$E^\lambda = 2Cg^{\lambda\rho}(R_{\beta\rho} - 1/2 g_{\beta\rho} R)X^\rho + \partial_\mu U^{\lambda\mu} .$$

Applicandola al nostro caso, cioè scegliendo la componente temporale per tale flusso, otteniamo

$$H_H = 2C\int(-g)^{1/2} G^0{}_0 \omega + \oint U^{01}\omega_1 ,$$

che per confronto con la (4.4), conduce alla seguente espressione

$$H = C\int(-g)^{1/2} G^0{}_0 \omega$$

come hamiltoniana equivalente all'hamiltoniana ADM.

Il discorso finora fatto concerne soltanto l'hamiltoniana "di volume", senza preoccuparci dei termini di superficie dinamici che debbono venir tolti dall'hamiltoniana affinchè essa coincida numericamente con l'hamiltoniana vera del sistema. Avevamo infatti dato la seguente espressione per l'hamiltoniana modificata

$$\underline{H}(\Sigma, X) = \int_\Sigma E^\lambda(L, X, \Gamma)\omega_\lambda + 1/2\int_{\partial\Sigma} C^{\lambda\mu}\,\omega_{\lambda\mu} ,$$

la quale si ottiene, se possibile, scegliendo opportune condizioni al contorno, in modo tale da poter costruire una 2-forma $C^{\lambda\mu}$, tale che l'hamiltoniana modificata $\underline{H}$ generi la giusta dinamica.

Per costruire la 2-forma $C^{\lambda\mu}$ conviene partire dall'espressione della variazione del flusso d'energia (3.16), per la quale abbiamo un'espressione per le

$\delta C^{\lambda\mu}$ data in funzione dei coefficenti della forma di P - C. Sostituendo le note espressioni nella (3.16) si trova:

$$\delta \mathbf{C}^{\lambda\mu} = -2CX^{[\lambda}\mathbf{g}^{\beta\rho}\delta \mathbf{U}^{\mu]}{}_{\beta\rho} \tag{4.5}$$

Facendo l'ipotesi che risulti

$$\delta \mathbf{g}^{\beta\rho}\big|_{\partial\Sigma} = 0,$$

ovvero che i campi risultino fissi sul bordo, si ricava

$$\mathbf{C}^{\lambda\mu} = -2CX^{[\lambda}\mathbf{g}^{\beta\rho}\mathbf{U}^{\mu]}{}_{\beta\rho} \tag{4.6}$$

Quet'ultima, pero', non è un'espressione covariante per trasformazioni generali di coordinate. Un possibile modo per renderla tale è quello di scegliere una connessione fissa di riferimento $\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(x)$, con $x \in M$, costruendo cosi la nuova quantità

$$\underline{\mathbf{C}}^{\lambda\mu} = -2CX^{[\lambda}\mathbf{g}^{\beta\rho}\mathbf{U}^{*\mu]}{}_{\beta\rho} \tag{4.7}$$

dove si e' posto

$$\mathbf{U}^{*\mu}{}_{\beta\rho} = \mathbf{U}^{\mu}{}_{\beta\rho} - \mathbf{U}^{\mu}{}_{\beta\rho}(x).$$

Ora, $\underline{\mathbf{C}}^{\lambda\mu}$ è un'espressione covariante e si ha, ovviamente, $\delta \mathbf{C}^{\lambda\mu} = \delta \underline{\mathbf{C}}^{\lambda\mu}$.

Sostituendo le espressioni trovate per $\underline{\mathbf{C}}^{\lambda\mu}$ e per E^{λ} otteniamo un'espressione per l'hamiltoniana modificata $\underline{H}$, data dalla

$$\underline{H} = C\int_{\Sigma}\{g^{\beta\mu}\pounds_X \mathbf{U}^{\lambda}{}_{\beta\mu} - X^{\lambda}[g^{\beta\mu}(\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}) + \partial_{\rho}(\mathbf{U}^{\rho}{}_{\beta\mu}(x)g^{\beta\mu})]\}\omega_{\lambda}$$

Conviene ora osservare che il termine tra parentesi quadre è la lagrangiana del primo ordine *covariante*

$$L' = C[\mathbf{g}^{\beta\mu}(\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}) + \partial_{\rho}(\mathbf{U}^{\rho}{}_{\beta\mu}(x)\mathbf{g}^{\beta\mu})]$$

la quale è, a tutti gli effetti, equivalente alla lagrangiana del secondo ordine di Hilbert. Cio' puo' stabilirsi immediatamente calcolando la variazione prima di L' rispetto a g e verificando che le equazioni di E - L cosi ottenute assicurano che g soddisfa le equazioni di Einstein nel vuoto $G_{\mu\nu} = 0$. (cfr. [20])

Calcoliamo ora l'espressione per il termine di superficie dato dalla (4.6), tale che esso soddifi alle condizioni richieste, e cioè $\delta\mathbf{g}^{\beta\rho}\big|_{\partial\Sigma} = 0$, e che il vettore X sia del tipo tempo. Va notato che si richiede l'annullamento della variazione della <u>densità</u> metrica sul bordo, la quale, nella decomposizione 3+1, equivale alla richiesta che risulti

$$2(2N^{-1}\delta N + g^{ij}\delta g_{ij})\big|_{\partial\Sigma} = \delta g^{\beta\rho}g_{\beta\rho}\big|_{\partial\Sigma}.$$

L'espressione (4.6) sarà allora data dalla

$$\mathbf{C}^{0l} = -C\mathbf{g}^{\beta\rho}\mathbf{U}^{l}{}_{\beta\rho}\ .$$

Siamo ora in grado di calcolare il termine di superficie che compare nella hamiltoniana H_H se viene richiesto l'annullarsi della variazione della densità metrica sul bordo del volume d'integrazione. Questo termine è dato dalla

$$\mathbf{C}^{0l} = -2C\{[g^{1/2}(KN^l - g^{il}D_iN^l)] - N^{-1}g^{1/2}(\partial_tN^l + \partial_iN^iN^l - \partial_iN^lN^i) + N^{-1}\mathbf{g}^{ij}U^l{}_{ij}\},$$

essendo $U^l{}_{ij} = G^l{}_{ij} - \delta^l{}_{(i}G^m{}_{j)m}$, il quale puo' anche essere scritto come segue

$$\mathbf{C}^{0l} = -C[N^{-1}\mathbf{g}^{ij}U^{l}{}_{ij} + 2\pi^{l}{}_{i}N^{i} - N^{-1}g^{1/2}(\partial_i N^i N^l - \partial_i N^l N^i)] - U^{0l}.$$

Quindi, l'hamiltoniana avrà finalmente l'espressione

$$\underline{H}_H = C\int(-g)^{1/2}G^0{}_0\omega - C\oint[N^{-1}\mathbf{g}^{ij}U^{l}{}_{ij} + 2\pi^{l}{}_{i}N^{i} - N^{-1}g^{1/2}(\partial_i N^i N^l - \partial_i N^l N^i)]\omega_l.$$

Se ora per questa hamiltoniana "completa" studiamo il comportamento asintotico, nelle ipotesi (3.8) e (3.9), si ottengono le seguenti espressioni per i termini di superficie

$$\oint[N^{-1}\mathbf{g}^{ij}U^{l}{}_{ij}]\omega_l = \alpha^{\perp}\oint(\partial_r g_{lr} - \partial_l g_{rr})\omega_l - 2\beta_{\perp r}\oint[x^r(\overbrace{\partial_s g_{ls} - \partial_l g_{ss})}^{-g_{lr}+g_{ss}\delta_{lr},}]\omega_l\,;$$

$$2\oint\pi^{l}{}_{i}N^{i}\omega_l = -2\alpha^i\oint\pi^{il}\omega_l - 2\beta^{rs}\oint(x^r\pi^{sl} - x^s\pi^{lr})\omega_l\,;$$

$$\oint[N^{-1}g^{1/2}(\partial_i N^i N^l - \partial_i N^l N^i)]\omega_l = 0\,.$$

Si vede quindi che il termine di superficie proposto $\mathbf{C}^{0l}$ riproduce quelli di Regge e Teitelboim (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13). Và notato anche che esso è pero' piu' generale, in quanto contiene il termine addizionale $[N^{-1}g^{1/2}(\partial_i N^i N^l - \partial_i N^l N^i)]$, che per altre soluzioni asintotiche puo' in principio produrre nuovi termini di superficie.

Il termine $\delta\mathbf{C}^{\lambda\mu}$, dato dalla (4.5), puo' essere messo nella forma equivalente

$$\delta\mathbf{C}^{\lambda\mu} = 2CXG^{\beta\rho\nu[\lambda}X^{\mu]}\nabla_\nu(\pounds_\Xi g_{\beta\rho}) \qquad (4.8)$$

dove abbiamo indicato con $G^{\beta\rho\nu\mu} = 1/2(\mathbf{g}^{\beta\nu}g^{\rho\mu} + \mathbf{g}^{\beta\mu}g^{\rho\nu} - 2\mathbf{g}^{\beta\rho}g^{\nu\mu})$ la metrica di De Witt e dove Ξ è il campo vettoriale verticale che genera la variazione prima.

Dalla (4.8) si vede che, se Ξ è un vettore di Killing conforme, cioè se

$$\pounds_{\Xi} g_{\beta\rho} = c g_{\beta\rho} \text{ , con } c = \text{costante,}$$

i termini di superficie $\delta C^{\lambda\mu}$ non compaiono. Lo stesso succede nel caso di δC^{0l}. In questa ipotesi, la variazione δH_H sarà allora data da

$$\delta H_H = C\int_\Sigma [\, \delta g^{\beta\mu}\, \partial_t(U^{\alpha}{}_{\beta\mu}) - \partial_t g^{\beta\mu} \delta(U^{\alpha}{}_{\beta\mu})]\omega \ ,$$

espressione valida sulle soluzioni del problema variazionale. Sostituendo a questa espressione le (4.2) per le Γ decomposte e, le (3.1) e le (3.2) per la metrica, si ottiene

$$\delta H_H = C\int_\Sigma [\delta \pi^{ij} \partial_t g_{ij} - \partial_t \pi^{ij} \delta g_{ij}]\omega + C\oint [\, \delta(N^{-1} g^{1/2}) \partial_t N^l - \partial_t(N^{-1} g^{1/2}) \delta N^l\,]\omega_l$$

Quindi, nel caso che termini di superficie non siano presenti, (fatto, questo, dovuto alla presenza di qualche simmetria, e non dal fatto che la varietà considerata sia senza bordo), la differenza tra la variazione dell'hamiltoniana proveniente dalla lagrangiana di Hilbert e la variazione dell'hamiltoniana proveniente dalla lagrangiana ADM (in pratica l'hamiltoniana di Regge e Teitelboim senza i termini di superficie) è data dal termine

$$C\oint [\, \delta(N^{-1} g^{1/2}) \partial_t N^l - \partial_t(N^{-1} g^{1/2}) \delta N^l\,]\omega_l$$

Tale termine di superficie corrisponde ad un sistema di equazioni di Hamilton "di superficie", i cui momenti canonicamente coniugati sono $N^{-1}g^{1/2}$ e N^l ed e` proprio tale termine addizionale che dimostra che lo spazio delle fasi del sistema associato alla hamiltoniana di Hilbert e` piu' grande di quello considerato da Arnowitt, Deser e Misner. Una trattazione preliminare di tale termine puo' essere trovata in [21].

CONCLUSIONI

Come si è visto, il formalismo ADM covariante sviluppato in [3], permette di interpretare adeguatamente i termini di bordo che compaiono in una teoria lagrangiana. Esso permette inoltre, sotto certe condizioni, di determinare opportune hamiltoniane modificate per la Relativita' Generale, valide non soltanto per soluzioni asintoticamente piatte, fornendo quindi un'interessante generalizzazione dell'hamiltoniana modificata proposta da Regge e Teitelboim. Và notato inoltre che tale formalismo potrebbe avere un'interessante applicazione al problema della positività della massa [17], [18]. Infatti, partendo dalla formula per il flusso d'energia ed imponendo che tale quantità sia definita positiva, si possono forse trovare le condizioni che una generale lagrangiana del secondo ordine (o del primo ordine equivalente) deve soddisfare perchè tale condizione (la positività) sia verificata. Questo problema sara' l'oggetto di ulteriore approfondimento.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Arnowitt R., Deser S., Misner C.W., The dynamics of General Relativity, in "Gravitation : An Introduction to Current Research"; L. Witten ed.; Wiley (New York, 1962) p.p. 227-265

[2] - Regge T., Teitelboim C., " Ann. Phys. (N.Y.) " **88** p.p. 286-318 (1974)

[3] - Ferraris M., Francaviglia M., Intrinsic ADM Formalism for Generally Covariant (Higher-Order) Field Theories - Preprint (1983)

[4] - Ferraris M., Fibered Connections and Global Poincare`-Cartan Forms in Higher Order Calculus of Variations in " Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications "; Part 2 Geometrical Methods in Physics p.p. 61-91; D. Krupka ed (Brno, Czechoslovakia, 1984)

[5] - Ferraris M., Francaviglia M., Reina C., Ann. Inst. H. Poincarè **38** (4), p.p. 371-383 (1983)

[6] - D. Krupka, Some Geometric Aspects of Variational Problems in Fibered Manifolds, Folia Fac. Sci. Nat. UJETP Brunensis (Physica) **14** p.p. 1-65 (1973).

[7] - Krupka D., On the Structure of the Euler-Lagrange Mapping, Arch. Math.(Brno) **10**, p.p. 55-61 (1974)

[8] - Kolar I., A geometrical Version of the Higher Order Hamiltonian Formalism in Fibered Manifolds, J. Geom. Phys. **1** (2) p.p. 127-137 (1984)

[9] - Garcia P.L., The Poincarè-Cartan Invariant in the Calculus of Variations, in: "Symposia Mathematica, **14** p.p. 203-267 (1974)

[10] - Ferraris M., Francaviglia M., Reina C., Fondamenti matematici delle teorie geometriche della gravitazione, V Convegno Nazionale di Relativita` Generale e Fisica della Gravitazione" (1982)

[11] - Ferraris M., Kijowski J.; Gen. Rel. Grav. **14** (2) p.p. 165-180 (1982)

[12] - Ferraris M., Francaviglia M., Energy-Momentum Tensors and Stress Tensors in Geometric Field Theories, J. Math Phys., **26** (6) ,p.p. 1243-1252 (1985)

[13] - Ferraris M., Francaviglia M., Robutti O. Energy and Superpotentials in Gravitational Field Theories in "Atti del 6 Convegno Nazionale di Relativita` Generale e Fisica della Gravitazione" p.p. 137-150 M. Modugno ed. (Bologna 1986)

[14] - Komar A., Phys. Rev. **113**, 934 (1959); Phys. Rev. **127**, 955 (1962)

[15] - Misner C., Thorne K., Wheeler J., Gravitation W.H. Freeman and Co., San Fransisco (1973)

[16] - Landau L.D., Lifshitz E.M., Teoria dei campi Ed. Riuniti

[17] - Schoen R., Yau S., Commun. Math. Phys., **65** p.p. 45-76 (1979), **79** p.p. 47-51 e 231-260 (1981)

[18] - Witten E., Commun. Math. Phys., **80**, 381 (1981)

[19] - Ferraris M., Francaviglia M., Intrinsic ADM Formalism for Lagrangian Field Theories in Fibered Manifolds in " 7th Italian Conference on General Relativity and Gravitational Physics " U. Bruzzo ed.; World Scientific p.p.55-66 (1987)

[20] - Ferraris M., Francaviglia M., "First - Order Covariant Lagrangians for General Relativity", (preprint, 1988)

[21] - Kijowski J., Asymptotic Degrees of Freedom and Gravitatinal Energy, in "Proceedings of Journees Relativistes" Ed. S. Benenti, M. Ferraris, M. Francaviglia Torino p.p. 205-219 (1983)