ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE PER CAMPI ELETTRICI E COSTANTI DIELETTRICHE EFFETTIVE IN MEZZI DISOMOGENEI O MEZZI RANDOM

CANDIDATO :
Dott. M. BALZANO

RELATORE :
Prof. G.F. DELL'ANTONIO

Anno Accademico
1983/84

TRIESTE

SISSA - SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE STUDI AVANZATI
TRIESTE
Strada Costiera 11

INDICE

INTRODUZIONE

Gli argomenti trattati in questo lavoro di tesi si inseriscono nel filone di ricerca di fisica-matematica che tratta lo studio del comportamento di mezzi altamente disomogenei o disordinati. In molti problemi fisici, come ad esempio nello studio della diffusione del calore, della conduttività elettrica, etc., può capitare che le quantità che caratterizzano il mezzo (tensore dielettrico, coefficiente di diffusione, etc.) non siano conosciute dettagliatamente, oppure che siano funzioni rapidamente variabili. In questi casi l'interesse é rivolto maggiormente alla determinazione di grandezze macroscopiche o quantità medie.

Un caso che tipicamente viene analizzato é quello di un mezzo dielettrico in una regione S di $\mathbb{R}^3$, con tensore dielettrico locale $\underline{\underline{\varepsilon}}(x)$. Se $\underline{\underline{\varepsilon}}(x)$ é una funzione rapidamente variabile o addirittura conosciuta solamente attraverso una distribuzione di probabilità, allora, si cerca di determinare una particolare quantità media denominata costante dielettrica effettiva del mezzo, ε^*. Numerosi autori recentemente hanno ottenuto risultati riguardanti ε^*. In particolare vogliamo citare i lavori di Bergman [7], [8], Papanicolau ed altri [3], [4], [5]. Noi avremo come riferimento principale i lavori [1], [2], in cui sono adottati consistentemente metodi di analisi funzionale.

L'obbiettivo principale nel seguito sarà analizzare da un particolare punto di vista le equazioni di Maxwell in una regione S limitata semplicemente connessa in $\mathbb{R}^3$, con apportune condizioni al contorno:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} E_j = \frac{\partial}{\partial x_j} E_i \qquad \forall\, \underline{x} \in S \qquad i,j = 1,2,3 \\ &\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ij}(\underline{x})\, E_j\right) = 0 \qquad \forall\, \underline{x} \in S \end{aligned}$$

dove $\underline{E} = (E_1, E_2, E_3)$ é un campo vettoriale su S e $(\varepsilon_{ij})_{\substack{i=1,2,3\\j=1,2,3}}$ é un campo tensoriale su S.

Il nostro interesse sarà rivolto sia al caso in cui il mezzo che occupa la regione S abbia una risposta lineare (il tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}(x)$ é indipendente dal campo $\underline{E}(x)$), sia a quello in cui la risposta sia non-lineare ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, \underline{E})$). In entrambi i casi il punto fondamentale dell'analisi sarà la riscrittura delle equazioni $(*)$, insieme con le relative condizioni al bordo, in termini di "equazioni operatoriali" nello spazio di Hilbert $(L^2(S))^3$.

A partire da questa forma equivalente delle equazioni si otterranno i seguenti risultati:

1. Caso lineare:
   (a) Raggiungimento di una rappresentazione rigorosa (in realtà di due famiglie ad un parametro di rappresentazioni) per la soluzione $\underline{E}$ dell'equazione $(*)$ nella regione S con contorno ∂S regolare, riempita con un materiale eterogeneo con tensore dielettrico $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$. Al tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ si richiederà che sia simmetrico, limitato, con inverso limitato.
   (b) Costruzione attraverso il risultato (a) di una rappresentazione per la costante dielettrica effettiva ε^* . ε^* sarà caratterizzata da due misure μ_{ε_0}, μ'_{ε_0} sulla retta reale positiva.
2. Caso non lineare:
   (a) Dimostrazione, sotto opportune ipotesi su $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ e sulla "non'linearità" del problema, di un teorema di esistenza e unicità della soluzione di $(*)$. Questo punto é di fondamentale importanza poichè nel caso in cui il tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ dipenda anche dal campo elettrico $\underline{E}$, l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole di $(*)$ viene in generale a mancare.
   (b) Ottenimento di una formula di rappresentazione per la costante dielettrica effettiva nel caso non lineare.

3. <u>Caso probabilistico</u>:

Rappresentazione per $\underline{E}$ come campo vettoriale stocastico in $\mathbb{R}^3$ quando $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é un campo vettoriale stocastico strettamente stazionario con realizzazioni che sono puntualmente tensori simmetrici, limitati, con inversi limitati. Si otterrà conseguengtemente una formula di rappresentazione per ε^* .

CAPITOLO I : Caso lineare

L'obiettivo principale del capitolo sarà quello di costruire una forma equivalente dell'equazioni di Maxwell per l'elettrostatica, in uno spazio di Hilbert opportuno.

L'analisi riguarderà il caso in cui una regione $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è occupata da un materiale avente risposta lineare; in altre parole, il tensore dielettrico $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ non dipenderà dal campo elettrico $\underline{E}$.

Un teorema di rappresentazione per $\underline{E}$ verrà dato.

Sarà immediato ricavare da quest'ultimo una rappresentazione per la costante dielettrica effettiva ε^*.

1.1 Equazioni di Maxwell

Sia S una regione aperta, limitata, semplicemente connessa di $\mathbb{R}^3$ e sia $\underline{\underline{\varepsilon}}$ un campo tensoriale.

Per tutto il capitolo assumeremo che $\underline{\underline{\varepsilon}}$ soddisfi le seguenti ipotesi:

(i) per ogni $\underline{x} \in S$, esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ tali che:

$$\alpha |\underline{\xi}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(\underline{x})\, \xi_i \xi_j \leq \beta |\underline{\xi}|^2$$

per ogni $\underline{\xi} \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$

(ii) $\varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon_{ji}(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in S$.

Il simbolo $|\cdot|$ denota il modulo del vettore; $\varepsilon_{ij}(\underline{x})$ le componenti del tensore.

Vogliamo studiare il seguente problema: trovare un campo vettoriale $\underline{E}$ soddisfacente le equazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} E_j = \frac{\partial}{\partial x_j} E_i \qquad \forall \underline{x} \in S \qquad i,j = 1,2,3 \\ &\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ij}(\underline{x})\, E_j\right) = 0 \qquad \forall \underline{x} \in S \end{aligned} \qquad (1.1.1)$$

con particolari condizioni sul contorno ∂S della regione.

Le equazioni (1.1.1) possono essere riscritte attraverso un'equazione ellittica lineare in forma di divergenza.

Infatti, dalla prima di (1.1.1) si ricava che esiste una funzione $\phi \in C^1(S)$ tale che:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\underline{x}) = E_i(\underline{x}) \qquad \text{per } i = 1, 2, 3$$

Sostituendo nella seconda di (1.1.1) si ottiene:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ij}(\underline{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(\underline{x})\right) = 0 \qquad (1.1.2)$$

Diamo, ora, una definizione di condizione al bordo per la (1.1.2) La definizione ci permetterà di ricoprire i casi fisici più interessanti.

<u>Definizione 1.1.3</u> Diremo che V è uno"spazio di funzioni con condizioni al bordo omogenee" se V è un sottospazio chiuso dello spazio di Sobolev $H^1(S)$ tale che V include lo spazio di Sobolev $H_0^1(S)$

<u>Definizione 1.1.4</u> Sia $\phi_0 \in C^1(S)$, $\phi_0 \neq 0$ tale che $\phi_0 \notin V$. Diremo che la funzione ϕ è una soluzione debole di (1.1.2) con condizioni al bordo (V, ϕ_0) se:

$$\phi - \phi_0 = \psi \in V$$

e in più ψ è soluzione dell'equazione:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ij}(\underline{x})\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_0 + \psi)\right) = 0$$

ovvero:

$$\int_S \sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(\underline{x})\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_0 + \psi)\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi \, d\underline{x} = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(S)$$

Alcuni esempi che ricorrono nella pratica sono:

(a) condensatore a lastre parallele;

(b) caso in cui la regione S in considerazione è la cella unitaria di un reticolo in $\mathbb{R}^3$, con condizioni al bordo periodiche;

(c) condizioni di Dirichlet al bordo non omogenee.

Caso (a) : si sceglierà $\phi_o(\underline{x}) = \hat{K} \cdot \underline{x}$ con $\hat{K}$ versore dell'asse perpendicolare alle lastre; V sarà lo spazio definito dalle funzioni che hanno condizioni di Dirichlet sui piatti e condizioni di Neumann sulla parte rimanente.

Caso (b) : fissato un qualunque vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ si potrà scegliere $\phi(\underline{x}) = \underline{b} \cdot \underline{x}$ e V sarà il sottospazio di $H^1(S)$ composto dalle funzioni periodiche.

Caso (c) : ϕ_o sarà la corrispondente funzione armonica e $V = H_0^1(S)$

Torniamo alle equazioni (1.1.1) . Consideriamo fissate le condizioni al bordo, ossia la coppia (V, ϕ_o)

<u>Definizione</u> Indicheremo con H lo spazio di Hilbert tale che:

$$H = \left\{ \{ \psi_1 , \psi_2 , \psi_3 \} \mid \psi_i \in L^2(S) \right\} \equiv \left(L^2(S) \right)^3$$

munito del prodotto scalare:

$$\langle \underline{\psi} , \underline{\varphi} \rangle = \int_S \left(\sum_{i=1}^{3} \psi_i \varphi_i \right)(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_S (\underline{\psi} \cdot \underline{\varphi})(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

dove $\underline{\psi} \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in H$, $\underline{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H$ e $(\cdot , \cdot)$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$. La norma in H verrà indicata con $\|\cdot\|_2$.

<u>Definizione 1.1.6</u> Denoteremo con $\mathcal{H}$ il più piccolo sottospazio di H che contiene tutti gli elementi della forma ∇u con $u \in V$ dove $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ derivata distribuzionale.

<u>Definizione 1.1.7</u> Indicheremo con A la proiezione ortogonale di H su $\mathcal{H}$.

Sia $\underline{E}(\underline{x}) \equiv (E_1(\underline{x}), E_2(\underline{x}), E_3(\underline{x}))$ la soluzione di (1.1.1) e sia $\underline{G} = \nabla\phi_o$.

La prima delle equazioni (1.1.1) insieme alla condizione al bordo (V, ϕ_o) potrà essere riscritta come:

$$A(\underline{E} - \underline{G}) = \underline{E} - \underline{G} \tag{1.1.8}$$

Poniamo:

$$\underline{B} = (I - A)\underline{G} \tag{1.1.9}$$

Poichè $\phi_o \notin V$, $A\underline{G} \neq \underline{G}$ e quindi $\underline{B} \neq 0$.

Notiamo che da (1.1.9) e dal fatto che A è un operatore di proiezione su H segue immediatamente:

$$A\underline{B} = 0 \tag{1.1.10}$$

Usando (1.1.10) , l'equazione (1.1.8) diventa:

$$A\underline{E} - \underline{E} = \underline{B} \tag{1.1.11}$$

Il campo tensoriale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ può essere considerato come operatore di moltiplicazione su H definito nel seguente modo:

$$(\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E})(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\,\underline{E}(\underline{x}) \qquad \forall\, \underline{E} \in H$$

(continueremo ad indicare l'operatore con il simbolo $\underline{\underline{\varepsilon}}$).

Per le ipotesi sul tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$, il vettore $\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E} \in H$ appartiene ad H e quindi possiamo riscrivere la seconda equazione di (1.1.1) nel seguente modo:

$$A\,\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E} = 0 \tag{1.1.12}$$

Infatti se $\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E}$ è ortogonale a $\left\{\nabla u\ ,\ u\in H_0^1(S)\right\}$, allora la seconda di $(1.1.1)$ è soddisfatta:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E}\,,\nabla u\rangle = \int_S (\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E}\,,\nabla u)(\underline{x})\,d\underline{x} =$$

$$-\int_S \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(\underline{x})\,E_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}u\Big)d\underline{x} =$$

$$\int_S \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(\underline{x})\,E_j\Big)u\,d\underline{x} = 0 \qquad \forall u\in H_0^1(S)$$

da cui la seconda delle equazioni $(1.1.1)$.

Osservazione 1.1.13 Le relazioni $(1.1.11)$ e $(1.1.12)$ rappresentano una forma equivalente delle equazioni di Maxwell insieme alle condizioni al contorno fissate. L'informazione delle condizioni al contorno è contenuta in questa nuova forma nel vettore $\underline{B}$.

Osservazione 1.1.14 In molti casi (ad esempio caso (a) e caso (b) di pag.) si ha che $\underline{G}$ è un vettore costante e $A\,\underline{G}=0$. Da $(1.1.9)$ si ha quindi $\underline{B}=\underline{G}$.

Bisogna sottolineare, però, che in generale $\underline{B}\neq\nabla\phi_0$.

1.2 Teoremi di rappresentazione per il campo elettrico

In questo paragrafo si ricaveranno due famiglie di rappresentazione per le soluzioni di $(1.1.11)$ e $(1.1.12)$.

Le rappresentazioni saranno utilizzate più tardi per dare delle rappresentazioni per la costante dielettrica effettiva.

Fissiamo un qualunque numero positivo $\varepsilon_0 > 0$.

Siano $\varepsilon_i(\underline{x})$ $i=1,2,3$ gli autovalori della matrice $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$.

Definizione 1.2.1 Denoteremo con $\mathcal{E}_+$ il numero positivo tale che:

$$\mathcal{E}_+ = \max_i \sup_{\underline{x}\in S} \varepsilon_i(\underline{x}) = \sup_{\underline{x}\in S} |\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})| = \|\underline{\underline{\varepsilon}}\|_\infty$$

dove $|\cdot|$ indica la norma delle matrici.

Definizione 1.2.2 Indicheremo con $\mathcal{E}_-$ il numero positivo tale che:

$$\mathcal{E}_- = \min_i \inf_{x\in S} \varepsilon_i(\underline{x}) = \left(\sup_{x\in S} |\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})^{-1}|\right)^{-1}$$

Definizione 1.2.3 Consideriamo $\mathcal{E}_o \geq \mathcal{E}_+$. Con $Q_{\mathcal{E}_o}(\underline{x})$denoteremo la matrice

$$Q_{\mathcal{E}_o}(x) \doteq \left(I - \frac{1}{\mathcal{E}_o}\underline{\underline{\varepsilon}}(x)\right)^{1/2} \qquad (1.2.4)$$

Osservazione 1.2.5 $\left(I - \frac{1}{\mathcal{E}_o}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\right)$ è una matrice positiva per le assunzioni fatte su $\mathcal{E}_o$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$, quindi ha senso definire la "radice quadrata"; inoltre:

$$\|Q_{\mathcal{E}_o}\|_\infty = \sup_{\underline{x}\in S} \left|\left(1 - \frac{1}{\mathcal{E}_o}\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\right)^{1/2}\right| < 1$$

Osservazione 1.2.6 E' immediato definire su H un operatore $Q_{\mathcal{E}_o}$ (usiamo lo stesso simbolo sia per la matrice che per l'operatore) nel modo seguente:

$$(Q_{\mathcal{E}_o}\underline{E})(\underline{x}) = Q_{\mathcal{E}_o}(\underline{x})\,\underline{E}(\underline{x}) \qquad \forall \underline{E} \in H$$

Ovviamente per l'osservazione (1.2.5) la norma di $Q_{\mathcal{E}_o}$ in H è strettamente minore di uno.

Dimostriamo, ora, il seguente teorema:

Teorema (di rappresentazione) 1.2.7 Sia $\mathcal{E}_+$ come nella definizione (1.2.1) . Allora, per ogni $\mathcal{E}_o \geq \mathcal{E}_+$ le equazioni (1.1.11) e (1.1.12) sono equivalenti a:

$$\underline{E} = \underline{B} + A Q_{\varepsilon_o} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o}} Q_{\varepsilon_o} \underline{B} \qquad (1.2.8)$$

con Q_{ε_o} come nella definizione $(1.2.3)$.

<u>Dimostrazione</u> Dalle $(1.1.11)$ e $(1.1.12)$ si ottiene la relazione equivalente:

$$A\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_o} \underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{E} = \underline{E} - \underline{B} \qquad (1.2.9)$$

L'equivalenza tra $(1.2.9)$ e $(1.1.11)-(1.1.12)$ si può verificare tenendo conto che A è un operatore di proiezione e che $A\underline{B} = 0$.

Moltiplicando entrambi i membri di $(1.2.9)$ per Q_{ε_o} si ha:

$$Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o} \cdot Q_{\varepsilon_o} \underline{E} = Q_{\varepsilon_o} \underline{E} - Q_{\varepsilon_o} \underline{B} \qquad (1.2.10)$$

Dall'osservazione $(1.2.6)$ sappiamo che Q_{ε_o} ha norma strettamente minore di uno; questo varrà anche per l'operatore $Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o}$.

La $(1.2.10)$ può essere riscritta nel modo seguente:

$$(I - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o}) Q_{\varepsilon_o} \underline{E} = Q_{\varepsilon_o} \underline{B}$$

L'operatore $(I - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o})$ è invertibile dato che la norma di $Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o}$ è minore di uno e quindi:

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon_o} \underline{E} &= (I - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o})^{-1} Q_{\varepsilon_o} \underline{B} = \\ &= Q_{\varepsilon_o} \underline{B} + Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o} (I - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o})^{-1} Q_{\varepsilon_o} \underline{B} \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

Nel caso in cui $\varepsilon_o > \varepsilon_+$, Q_{ε_o} è invertibile e da $(1.2.11)$ si ricava:

$$\underline{E} = \underline{B} + A Q_{\varepsilon_o} (I - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o})^{-1} Q_{\varepsilon_o} \underline{B} \qquad (1.2.12)$$

La $(1.2.12)$ è valida anche per $\varepsilon_o = \varepsilon_+$. Infatti il membro a destra è definito anche per $\varepsilon_o = \varepsilon_+$ e un calcolo diretto mostra che esso risolve l'equazione $(1.2.8)$. La rappresentazione è valida quindi per ogni $\varepsilon_o \geq \varepsilon_+$.■

In maniera analoga una seconda famiglia di rappresentazioni di $\underline{\underline{E}}$ è ottenuta se $0 < \varepsilon_o \leq \varepsilon_-$ (vedi $(1.2.2)$)

<u>Definizione 1.2.13</u> Consideriamo $\varepsilon_o \leq \varepsilon_-$. Con $\widetilde{Q}_{\varepsilon_o}$ denoteremo la matrice

$$\widetilde{Q}_{\varepsilon_o}(\underline{x}) \doteq \left(\frac{1}{\varepsilon_o} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - 1 \right)^{1/2} \qquad (1.2.14)$$

<u>Osservazione 1.2.15</u> $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_o} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\right)$ è una matrice negativa, quindi ha senso la definizione $(1.2.13)$ ed inoltre $\widetilde{Q}_{\varepsilon_o}$ e $\widetilde{Q}_{\varepsilon_o} A \widetilde{Q}_{\varepsilon_o}$ sono operatori positivi su H con norma strettamente minore di uno.

Seguendo la linea di dimostrazione del teorema $(1.2.7)$ può essere provato anche il seguente:

<u>Teorema (di rappresentazione) 1.2.16</u> Sia ε_- come nella definizione $(1.2.2)$. Allora, per ogni $0 < \varepsilon_o \leq \varepsilon_-$, le equazioni $(1.1.11)$ e $(1.1.12)$ sono equivalenti a:

$$\underline{E} - \underline{B} - A \widetilde{Q}_{\varepsilon_o} \frac{1}{1 + \widetilde{Q}_{\varepsilon_o} A \widetilde{Q}_{\varepsilon_o}} \widetilde{Q}_{\varepsilon_o} \underline{B} \qquad (1.2.17)$$

Un caso particolarmente interessante è quello in cui $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ assume solamente un numero finito di valori. Più specificamente, supponiamo che la regione S sia suddivisa in N parti S_α , $\alpha = 1, \dots, N$ con $S_\alpha \cap S_\beta = \{\phi\}$ quando $\alpha \neq \beta$.

Il tensore dielettrico è della forma $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \varepsilon_\alpha \quad \alpha = 1,\ldots,N$.

Denotiamo con $\varepsilon_{\alpha,i}$ gli autovalori di ε_α. Allora è possibile dimostrare che con l'utilizzo delle rappresentazioni (1.2.2) e (1.2.7) il campo elettrico $\underline{E}(\underline{x})$ è una funzione analitica degli x_i nel dominio:

$$\Theta = \left\{ \underset{\sim}{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha,i}\} \in \mathbb{C}^{3N} \setminus 0 \mid \exists\, a \in \mathbb{R} \text{ tale che } \frac{\pi}{2} - a < \arg \varepsilon_{\alpha,k} < \frac{\pi}{2} + a \quad \forall \alpha = 1,\ldots,N \quad \forall k = 1,2,3 \right\}$$

Per i dettagli si veda

1.3 <u>Costante dielettrica effettiva e sua rappresentazione.</u>

I teoremi di rappresentazione per il campo elettrico che abbiamo appena dimostrato, ci permettono di dare dei risultati sulla costante dielettrica effettiva, ε^*, del mezzo. Costruiremo, infatti, due misure μ_{ε_0} e $\mu_{\varepsilon_0}^1$ sulla retta reale positiva, che caratterizzeranno due rappresentazione di ε^*. Definiremo ε^* nel modo seguente:

$$\varepsilon^* \doteq \frac{1}{|S|\cdot\|\underline{B}\|^2} \int_S \left(\underline{B}(\underline{x}),\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})\,\underline{E}(\underline{x})\right) d\underline{x} = \frac{1}{|S|\,\|\underline{B}\|^2} \langle \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E} \rangle \qquad (1.3.1)$$

dove $\|\underline{B}\|_2 = \frac{1}{|S|} \int_S \underline{B}^2(\underline{x})\, d\underline{x}$

La rappresentazione che ricaveremo esplicitamente è valida per qualsiasi tensore dielettrico $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ che sia simmetrico e che soddisfi:

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \varepsilon(x)\cdot I$ con $\varepsilon(x) \in L_+^\infty$ dove $L_+^\infty = \{ f \in L^\infty : \operatorname{ess\,inf}_x f(x) > 0 \}$

Nel seguito avremmo bisogno di alcuni risultati di Teoria Spettrale per operatori autoaggiunti; saranno perciò necessari alcuni richiami.

Sia $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_+$. Poniamo $Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0} \equiv T$.

T è un operatore autoaggiunto, limitato, sullo spazio di Hilbert H.

Consideriamo l'insieme di tutte le funzioni continue sullo spettro di T, $\sigma(T)$. Indicheremo con $\mathcal{C}(\sigma(T))$ tale spazio.
E' possibile dimostrare (N.p.e. (   ) Cap VII, Teorema VII.1) che esiste un'unica applicazione $\phi : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ dove $\mathcal{L}(H)$ è lo spazio degli operatori lineari, limitati su H: tale che:

(a) $\phi(fg) = \phi(f)\,\phi(g)$ $\qquad\qquad \phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$

$\phi(1) = I$ $\qquad\qquad \phi(\bar{f}) = \phi(f)^*$

($*$ si intende "aggiunto").

(b) ϕ è continuo, cioè $\|\phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C\|f\|_\infty$

(c) Sia f la funzione $f(x) = x$; allora $\phi(f) = A$.

Allora, per ogni $\psi \in H$, l'applicazione $f \longmapsto \langle\psi, \phi(f)\psi\rangle$ è un funzionale lineare su $\mathcal{C}(\sigma(T))$.

Per il teorema di Riesz-Markov (N.p.e. (   )) esiste, allora, un'unica misura di Borel μ_ψ su $\sigma(T)$ tale che:

$$\langle\psi, \phi(f)\psi\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda) \qquad (1.3.2)$$

La misura μ_ψ è detta usualmente "misura spettrale" relativa a T associata al vettore ψ .
D'altra parte, (1.3.2) può essere vista anche in termini di famiglia spettrale di proiezioni.

<u>Definizione 1.3.3</u> : Sia Ω un insieme di Borel in $\sigma(T)$; definiamo

$$P(\Omega) \doteq \phi(\chi_\Omega)$$

dove χ_Ω è la funzione caratteristica di Ω e ϕ è l'omeomorfismo tra $C(\sigma(T))$ e $\mathcal{L}(H)$. $P(\Omega)$ è chiamata "proiezione spettrale".

<u>Osservazione 1.3.4</u> : $P(\Omega)$ è una proezione ortogonale perchè $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega$

puntualmente.

Definizione 1.3.5 : L'insieme delle proezioni spettrali $\{P(\Omega) \mid \Omega$ insieme di Borel arbitrario $\}$ è chiamato "famiglia spettrale di proezioni".

Proposizione 1.3.6 : La famiglia di proiezioni spettrali di un operatore autoaggiunto, limitato T , gode delle seguenti proprietà:

(a) ogni $P(\Omega)$ è una proiezione ortogonale

(b) $P(\phi)=0 \quad P(-a,a)=I$ per qualche a (es. $a>\|T\|$).

(c) se $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ con $\Omega_n \cap \Omega_m=\phi$ per tutti $n \neq m$

allora:

$$P(\Omega)=s-\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} P(\Omega_n)\right)$$

Dim: Per una dimostrazione V.p.e.

Le proprietà (a),(b),(c), sono proprietà caratteristiche delle misure σ-additive. Sia $\{P(\Omega)\}$ una famiglia spettrale; allora:

$$\langle \phi, P(\Omega)\phi \rangle \qquad \forall \phi \in H$$

è unamisura ordinaria su ~~una~~ la retta.

Useremo il simbolo $d(\phi, P_\lambda \phi)$ per integrare rispetto a questa misura. E' facile vedere a questo punto che la misura μ_ψ che compariva in (1.3.2) è data da:

$$\mu_\psi(\Omega)=\langle\psi, P(\Omega)\psi\rangle \qquad \forall \psi \in H$$

e Ω Borelliano di $\mathbb{R}$

ed inoltre:

$$\langle\psi, \phi(f)\psi\rangle=\int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d(\psi, P_\lambda\psi) \qquad (1.3.7)$$

Per conludere la parentesi di Teoria Spettrale, enunciamo il

Teorema Spettrale 1.3.8 :

Esiste una corrispondenza 1-1 tra operatori limitati autoaggiunti A e famiglie spettrali $\{P(\Omega)\}$ date da:

$$A \longmapsto \{P(\Omega)\} = \{\chi_\Omega(A)\}$$

$$\{P(\Omega)\} \longmapsto A = \int \lambda \, dP_\lambda$$

Dim: Per una dimostrazione V.p.e. [10]

Una conseguenza immediata del Teorema Spettrale è che se T è un operatore autoaggiunto limitato su H e $\{P(\Omega)\}$ è la famiglia spettrale associata, si ha:

$$f(A) = \int f(\lambda) \, dP_\lambda$$

per ogni f Boreliana limitata sul supporto di $P(\Omega)$

e in particolare:

$$A = \int \lambda \, dP_\lambda$$

(Gli integrali vanno intesi in senso forte; ossia prima applicare a $\psi \in H$ e poi integrare).

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

<u>Teorema (di rappresentazione per $\mathcal{E}^*$) 1.3.9</u>.

Sia $\mathcal{E}^*$ definita come in 1.3.1. e sia $\mathcal{E}_+$ come nella 1.2.1.

Inoltre, sia $\underline{\underline{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x) \cdot \underline{\underline{I}}$ con $\varepsilon(x) \in L^\infty_+$.

Allora, per ogni $\mathcal{E}_0 \geq \mathcal{E}_+$, esiste una unica misura di Borel $\mu_{\mathcal{E}_0}$ sulla retta reale positiva tale che:

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{|S| \, \|\underline{B}\|_2^2} \left\{ < \underline{\underline{\varepsilon}} \, \underline{B}, \underline{B} > - \, \mathcal{E}_0 \, c_0 \int \frac{\lambda}{1-\lambda} \, d\mu_{\mathcal{E}_0}(\lambda) \right\} \qquad 1.3.10$$

dove

$$c_0 = \int_S \left(1 - \frac{\varepsilon(x)}{\mathcal{E}_0}\right) \, |\underline{B}(x)|^2 \, dx \, .$$

Dimostrazione:

Consideriamo in $\mathcal{H}$ il vettore $Q_{\varepsilon_0}\underline{B} \doteq \underline{\Psi}$

La norma di $\underline{\Psi}$ sarà:

$$\|\underline{\Psi}\|_2^2 = \int_S (\underline{B}(x), Q_{\varepsilon_0}^2(x).\underline{B}(x))\, dx = \int_S \left(\underline{B}(x), \left(1 - \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0}\right)\underline{B}(x)\right) dx =$$

$$= \int_S \left(1 - \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0}\right) |\underline{B}(x)|^2\, dx .$$

Poniamo $\|\underline{\Psi}\|_2^2 = c_0$ e $\tilde{\underline{\Psi}} = \underline{\Psi}/\sqrt{c_0}$

Denotiamo con μ_{ε_0} la misura spettrale relativa all'operatore $Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0} \doteq T$ associata al vettore normalizzato $\tilde{\underline{\Psi}}$; in altre parole:

$$\mu_{\varepsilon_0}(\Omega) = (\tilde{\underline{\Psi}}, P_{\varepsilon_0}(\Omega)\tilde{\underline{\Psi}})$$

per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}$, dove P_{ε_0} è la famiglia spettrale associata a T . Calcoliamo esplicitamente la quantità $< \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{B}, \underline{B} >$:

Da 1.2.8 si ha:

$$< \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E} > = < \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{B} + A\, Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0}} Q_{\varepsilon_0}\underline{B}\right) > =$$

$$= < \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{B} > + < \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}\, A\, Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0}} Q_{\varepsilon_0}\underline{B} > .$$

Per definizione abbiamo $\underline{\underline{\varepsilon}}(x) = \varepsilon_0\left(1 - Q_{\varepsilon_0}^2(x)\right)$, per cui

$$< \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}\, A\, Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0}} \underline{B} > =$$

$$= \varepsilon_0 < \underline{B}, (I - Q_{\varepsilon_0}^2) A\, Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0}} Q_{\varepsilon_0}\underline{B} > =$$

$$= - \mathcal{E}_0 < Q_{\mathcal{E}_0} \underline{B} , Q_{\mathcal{E}_0} A Q_{\mathcal{E}_0} \frac{1}{1 - Q_{\mathcal{E}_0} A Q_{\mathcal{E}_0}} Q_{\mathcal{E}_0} \underline{B} > .$$

Nell'ultima uguaglianza si è sfruttata la relazione $A \underline{B} = 0$.
Considerando che $Q_{\mathcal{E}_0} \underline{B} = \Psi = \sqrt{c}\, \tilde{\Psi}$ si ottiene :

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{|S| \, \|\underline{B}\|_2^2} \left\{ < \underline{B} , \underline{\underline{\mathcal{E}}} \, \underline{B} > - \mathcal{E}_0 c < \tilde{\Psi} , \frac{T}{1 - T} \tilde{\Psi} > \right\}$$

Da 1.3.2 oppure da 1.3.7 si ricava l'asserto.■

<u>Osservazione 1.3.11</u> : Dato che $\| Q_{\mathcal{E}_0} A Q_{\mathcal{E}_0} \| < \left(1 - \frac{\mathcal{E}_+}{\mathcal{E}_0} \right)$ si avrà

$$\sigma (Q_{\mathcal{E}_0} A Q_{\mathcal{E}_0}) \subset \left[0 , \left(1 - \frac{\mathcal{E}_+}{\mathcal{E}_0} \right) \right]$$

per cui la misura $\mu_{\mathcal{E}_0}$ sarà una misura di probabilità con supporto contenuto in $\left[0 , 1 - \frac{\mathcal{E}_+}{\mathcal{E}_0} \right]$

Una seconda famiglia di misure è possibile ricavare se si considera: $\mathcal{E}_0 \leq \mathcal{E}_-$, $\mu^1_{\mathcal{E}_0}$ la misura spettrale associata all'operatore $\tilde{Q}_{\mathcal{E}_0} A \tilde{Q}_{\mathcal{E}_0}$ con $\tilde{Q}_{\mathcal{E}_0}$ come in 1.2.14 , relativa al vettore normalizzato:

$$1 / \sqrt{c_0^1} \quad \tilde{Q}_{\mathcal{E}_0} \cdot \underline{B}$$

dove

$$c_0^1 = \int_S \left(\frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{E}_0} - 1 \right) |B(x)|^2 dx$$

In questo caso avremmo:

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{|S| \, \|\underline{B}\|_2^2} \left\{ < \underline{B} , \underline{\underline{\mathcal{E}}} \, \underline{B} > - \mathcal{E}_0 c_0^1 \int \frac{\lambda}{1 - \lambda} d\mu^1_{\mathcal{E}_0}(\lambda) \right\}$$

La misura $\mu^1_{\mathcal{E}_0}$ avrà supporto contenuto nell'intervallo $\left[0 , \frac{\mathcal{E}_-}{\mathcal{E}_0} - 1 \right]$.

CAPITOLO II : Caso non lineare

Affronteremo lo studio dell'equazione di Maxwell indipendenti dal tempo, in una regione S di $\mathbb{R}^3$ quando il tensore dielettrico $\underline{\underline{\varepsilon}}(x)$ dipende dal campo elettrico $E(x)$.(risposta non lineare del mezzo).

Nel caso lineare, l'esistenza e l'unicità della soluzione delle equazioni, con particolari condizioni al bordo, erano una conseguenza del lemma di Lax-Milgram. Nel caso non lineare un primo problema sarà di dimostrare l'esistenza della soluzione.
A questo proposito, ripetendo l'analisi fatta nel capitolo precedente, riscriveremo, facendo opportune ipotesi su $\underline{\underline{\varepsilon}}$, le equazioni di Maxwell, insieme alle condizioni al bordo, nello spazio di Hilbert $\left(L^2(S)\right)^3$ nella forma:

$$(*) \qquad \underline{\underline{E}} = \underline{B} + T(\underline{\underline{E}}, \underline{B})$$

dove T, questa volta, è un operatore non lineare e $\underline{B}$ è sempre determinato dalle condizioni al bordo. Analizzando $(*)$ proveremo un teorema di esistenza e unicità della soluzione.

(2.1) Equazioni di Maxwell nel caso non lineare.

Sia S un dominio limitato, semplicemente connesso di $\mathbb{R}^3$; sia $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})$ un campo di tensori dielettrici dipendenti dal vettore $\underline{E}$
Il tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x)$ potrebbe dipendere in maniera locale oppure globale da $E(x)$.

Esempi:

(a) dipendenza locale:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x) = \tilde{\varepsilon}(x, E(x))$$

dove $\tilde{\varepsilon}$ è un campo tensoriale su $S \times \mathbb{R}^3$.

(b) dipendenza non locale :

$$\varepsilon_{ij}(\underline{E})(x) = \varepsilon^{(1)}_{ij}(x) + \int_S g_{ij}(x-y)\, E^2(y)\, dy$$

dove g e $\varepsilon^{(1)}$ sono campi tensoriali rispettivamente su $S \times S$ e S non dipendenti da $\underline{E}$.

Sul campo tensoriale faremo le seguenti ipotesi:

(i) per ogni $x \in S$ e per ogni $\underline{E} \in H$, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x)$ è un tensore simmetrico. Inoltre, esiste una funzione $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ limitata su intervalli limitati tale che:

$$\| \underline{\underline{\varepsilon}}(E) \|_\infty = \sup_{x \in S} | \underline{\underline{\varepsilon}}(E)(x) | \leq h(\| \underline{E} \|_2)$$

con $|\cdot|$ norma delle matrici.

(ii) esiste un numero positivo α tale che per tutti i vettori $\underline{E} \in H$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(E)(x) \geq \alpha \cdot \underline{I} \qquad \forall x \in S$$

Le equazioni di Maxwell saranno in questo caso:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_j = \frac{\partial}{\partial x_j} E_i \qquad \forall x \in S \quad i,j = 1,2,3.$$

$$(2.1\,1) \qquad \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij}(x, \underline{E})\, E_j(x) \right) = 0 \qquad \forall x \in S$$

con particolari condizioni al bordo.

Le 2.1.1. riscritte come equazione alle derivate parziali, non lineare, in forma di divergenza, diventano:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij}(x, \nabla\phi)\, \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) = 0 \qquad (2.1.2)$$

Per 2.1.2 definiamo le condizioni al contorno come in (1.1) :

<u>Definizione 2.1.3 :</u> Sia V un sottospazio chiuso di $H^1(S)$ tale

che $V \supseteq H_0^1(S)$ e sia $\phi_0 \in C^1(S)$, $\phi_0 \neq 0$ tale che $\phi_0 \notin V$
Direme che ϕ è seluzione debole di $(2.1.2)$ con condizioni al bordo (V, ϕ_0) se:

$$\phi - \phi_0 \doteq \Psi \in V$$

e in più Ψ sia soluzione debole dell'equazione:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij} \left(\nabla \phi_0 + \nabla \Psi \right)(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_0 + \Psi)(x) \right) = 0$$

Poniamo $G = \nabla \phi_0$, sia $\mathcal{H}$ come nella definizione 1.1.6 e l'operatore definito in 1.1.7 .
Seguendo la linea del paragrafo (1.1) si può riscrivere la prima equazione di $(2.1.1)$ insieme alle condizioni al contorno (V, ϕ_0) come:

$$A \underline{E} - \underline{E} = \underline{B} \qquad (2.1.4)$$

Inoltre, l'ipotesi (i) implica che per ogni $\underline{E} \in H$, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})$ è un operatore di moltiplicazione su H . Perciò $\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E} \in H$ e la seconda dell'equazioni di $(2.1.1)$ può essere scritta nella forma:

$$A\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E}) \cdot \underline{E} = 0 \qquad (2.1.5)$$

Sia $\underline{E} \in H$ una soluzione di $(2.1.4)$ e $(2.1.5)$.

<u>Definizione 2.1.6</u> : Denoteremo con $\overline{\mathcal{E}}_+$ il più piccolo numero positivo tale che:

$$\sup_{x \in S} \left| \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x) - \overline{\mathcal{E}}_+ \cdot I \right| \leq 0$$

<u>Osservazione 2.1.7</u> : Per l'ipotesi (i), $\overline{\mathcal{E}}_+$ è minore di $+\infty$.

<u>Definizione 2.1.8</u> : Sia $\varepsilon_0 \geq \overline{\mathcal{E}}_+$. Indicheremo con $Q_{\varepsilon_0}(\underline{E})(x)$ la matrice:

$$Q_{\varepsilon_0}(\underline{E})(x) = \left(I - \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x)}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \qquad (2.1.9)$$

Ovviamente $Q_{\varepsilon_0}(\underline{E})(x)$ è una matrice simmetrica con norma strettamente più piccola di 1. La (2.1.9) ci permette di definire, come abbiamo fatto precedentemente, un operatore di moltiplicazione su H, che continueremo ad indicare con Q_{ε_0}. Con queste definizioni, seguendo fedelmente la dimostrazione del teorema di rappresentazione (1.2.7) è possibile dimostrare il lemma seguente:

Lemma 2.1.10: Assumiamo le ipotesi (i) e (ii). Sia $\bar{\varepsilon}_+$ definito come in 2.1.6. Allora, per ogni $\varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}_+$ le equazioni (2.1.4) e (2.1.5) sono equivalenti alle equazione:

$$\underline{E} = \underline{B} + A\, Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0}} Q_{\varepsilon_0} \underline{B} \qquad (2.1.11)$$

dove Q_{ε_0} è definito come in 2.1.3.

Dimostrazione: vedi teorema 1.2.7.

In maniera analoga è possibile costruire una seconda famiglia di equazioni equivalente a (2.1.4) e (2.1.5).

Definizione 2.1.12: denoteremo con $\bar{\varepsilon}_-$ il più grande numero reale tale che:

$$\inf_{x \in S} \left| \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x) - \varepsilon_- \cdot I \right| \geq 0$$

Per l'assunzione (ii) si ha $\varepsilon_- > 0$.

Definizione 2.1.13: Per $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_-$, definiamo:

$$\tilde{Q}_{\varepsilon_0}(\underline{E})(x) \doteq \left(\frac{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(x)}{\varepsilon_0} - I \right)^{1/2} \qquad \forall x \in S$$

Le matrici Q'_{ε_0} sono positive e limitate.

Lemma 2.1.14: Assumiamo (i) e (ii). Sia $\bar{\varepsilon}_-$ come in def. (2.1.12). Allora per ogni $0 < \varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}_-$ le equazioni (2.1.4) e (2.1.5) sono equivalenti a:

$$\underline{E} = \underline{B} - A\, \tilde{Q}_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \tilde{Q}_{\varepsilon_0} A\, \tilde{Q}_{\varepsilon_0}} \tilde{Q}_{\varepsilon_0} \underline{B} \qquad (2.1.15)$$

$\tilde{Q}_{\varepsilon_0}$ è come in 2.1.13 .

Dimostrazione: vedi teorema 1.2.7

Nel caso non lineare gli operatori Q_{ε_0} e $\tilde{Q}_{\varepsilon_0}$ dipendono da $\underline{E}$ quindi, le equazioni (2.1.11) e (2.1.15) sono equazioni cui $\underline{E}$ deve soddisfare e non più rappresentazioni per $\underline{E}$ come nel caso lineare.

2.2 Teorema di esistenza e unicità.

Nel seguito studieremo l'equazione (2.1.11) (o che è lo stesso la (2.1.15)). Come abbiamo già sottolineato la (2.1.11) è una equazione non lineare in $\underline{E}$ per cui bisognerebbe stabilire l'esistenza di almeno una soluzione. Noi mostreremo che, in particolari condizioni, è possibile provare l'esistenza e l'unicità di una soluzione per (2.1.11) . Le assunzioni che faremo verranno denominate "condizioni di debole non linearità". Più specificamente supporremo che $\underline{\varepsilon}(\underline{E})(x)$ abbia la forma:

(iii) $$\underline{\varepsilon}(\underline{E})(x) = \tilde{\varepsilon}(x) + \varphi_\lambda(\underline{E})(x)$$

dove $|\tilde{\varepsilon}(x)| \in L^\infty(S)$ e inoltre

$$\inf_{x \in S} |\tilde{\varepsilon}(x) - \tilde{\varepsilon}_- \cdot I| \geq 0 \qquad \text{per qualche } \tilde{\varepsilon}_- > 0$$

λ sarà un parametro reale positivo.

Osservazione 2.2.1 : L'ipotesi (i), ci assicura l'esistenza di una funzione

$$\mathbb{C} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

limitata su insiemi limitati, tale che:

$$\sup_{x \in S} |\varphi_\lambda(\underline{E})(x)| \leq c(\lambda, \|E\|)$$

Definizione 2.2.2 : Diremo che per l'equazione (2.1.11) valgono le "condizioni di debole linearità" se esiste una funzione crescente:

$$p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{con} \quad \lim_{\xi \to +\infty} p(\xi) = +\infty$$

tale che: $\sup_{b \le p(\lambda)} e(\lambda, b) \to 0 \quad \text{per } \lambda \to 0$

<u>Osservazione (2.2.3)</u>: Ovviamente, se si assume la def. (2.2.2), quando λ tenderà ad assumere valori piccoli, $\| \varphi_\lambda(\underline{\underline{E}}) \|_\infty$ non potrà prendere valori grandi anche se $\| \underline{\underline{E}} \|$ tenderà a crescere. Il problema di trovare una soluzione di (2.1.11) in una opportuna sfera di raggio ρ dello spazio di Hilbert H, può essere visto nel modo seguente:

Sia

$$\mathcal{B}_\rho = \left\{ \underline{\underline{E}} \in H \ : \ \| \underline{\underline{E}} \|_2 \le \rho \right\}$$

la sfera di centro nell'origine e raggio ρ in H.

e sia:

$$\varepsilon_+(\rho) = \sup_{0 \le \xi \le \rho} h\left(\left(\xi^2 + \| B \|_2^2 \right)^{1/2} \right) \qquad (2.2.4)$$

dove h è la funzione definita nell'ipotesi (i).

Per ogni $\varepsilon_0 \ge \varepsilon_+(\rho)$, consideriamo l'applicazione da $\mathcal{B}_\rho$ in H definita da:

$$\phi_\lambda(\underline{W}) \doteq A\, Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A\, Q_{\varepsilon_0}} Q_{\varepsilon_0} \underline{B} \qquad (2.2.5)$$

dove

$$Q_{\varepsilon_0}(\underline{W})(x) \doteq \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\varepsilon}} (\underline{W} + \underline{B})(x) \right)^{1/2}$$

Dall'ipotesi (i) segue che $Q_{\varepsilon_0}(W)(x)$ una matrice strettamente positiva uniformemente in S^1 e in $\mathcal{B}_\rho$.

E' ovvio che prendendo $\underline{W} = \underline{\underline{E}} - \underline{B}$ si riottiene $Q_{\varepsilon_0}(\underline{\underline{E}})(x)$ come definito in (2.1.9), quindi, possiamo dire che le soluzioni di (2.1.11) sono i punti fissi dell'applicazione ϕ. Per dare una prova dell'esistenza e dell'unicità di un punto fisso per ϕ_λ in una opportuna sfera $\mathcal{B}_\rho$ di H, sarà necessario dimostrare che:

(a) ϕ_λ lascia invariante la sfera B_ρ

(b) ϕ_λ è una contrazione.

Verificati i punti (a) e (b) si potrà applicare il ben noto teorema del punto fisso.

Per verificare il punto (a) dimostriamo il seguente lemma:

<u>Lemma 2.2.6</u> : Assumiamo (i) (ii) e (iii), allora:

esiste $\lambda_0 > 0$ ed esistono due funzioni:

$\rho_1 : [0, \lambda_0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$; $\rho_2 : [0, \lambda_0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$

tali che l'applicazione: $\phi_\lambda : H \longrightarrow H$

definita in (2.2.5) con

$$Q_{\varepsilon_0}(\omega)(\underline{x}) = \left(I - \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\tilde{\varepsilon}(\underline{x}) + \varphi_\lambda(\omega + \underline{B})(\underline{x})\right)\right)^{1/2}$$

lascia invariante la sfera B_ρ di H per ρ tale che:

$$\rho_1(\lambda) \leq \rho \leq \rho_2(\lambda)$$

In più $\rho_2(\lambda) \longrightarrow +\infty$ quando $\lambda \longrightarrow 0$

<u>Dimostrazione:</u>

Considerando che A è un operatore di proiezione e quindi $\|A\|_2 < 1$, dalla definizione di ϕ_λ si ha:

$$\|\phi_\lambda\|_2 \leq \|Q_{\varepsilon_0}\|_\infty^2 \left\| \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0}} \right\|_\infty \|\underline{B}\|_2$$

Dall'ipotesi (ii) segue che:

$\exists \alpha > 0$: $\underline{\underline{\varepsilon}}(\omega)(\underline{x}) \geq \alpha \cdot I$ $\forall \underline{x} \in S$ e $\forall \underline{E} \in H$

da cui:

$$Q_{\varepsilon_0}(\omega)(\underline{x}) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \cdot I \qquad \forall \underline{x} \in S$$

In più per l'ipotesi (i), $Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0}$ è positivo e tale che:

$$\|Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0}\|_\infty \leq \|Q_{\varepsilon_0}\|_\infty^2 < 1$$

Allora:

$$\| (I - Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0}) \|_\infty \geq \| I - Q_{\varepsilon_0}^2 \|_\infty$$

e quindi:

$$\| (I - Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0})^{-1} \|_\infty \leq \| (I - Q_{\varepsilon_0}^2)^{-1} \|_\infty =$$

$$= \sup_{\underline{x} \in S} \frac{\varepsilon_0}{|\underline{\underline{\xi}}(\underline{E})(\underline{x})|} \leq \frac{\varepsilon_0}{\alpha}$$

In definitiva se:

$$\varepsilon_0 \geq \sup_{\underline{x} \in S} |\underline{\underline{\xi}}(\underline{E})(\underline{x})| \qquad (2.2.7)$$

allora:

$$\| \phi \|_2 \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha} - 1 \right) \| \underline{B} \|_2 \qquad (2.2.8)$$

Poniamo:

$$\tilde{\varepsilon}_+ \doteq \sup_{\underline{x} \in S} |\tilde{\varepsilon}(\underline{x})|$$

Allora (2.2.7) sussiste se:

$$\varepsilon_0 \geq \tilde{\varepsilon}_+ + c\left(\lambda, (\| \underline{B} \|_2^2 + \| w \|_2^2)^{1/2}\right) \qquad (2.2.9)$$

Ma se (2.2.5) sussiste, si ha:

$$\| \phi_\lambda(w) \|_2 \leq \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_+}{\alpha} + \frac{c(\lambda, (\| B \|_2^2 + \| w \|_2^2)^{1/2})}{\alpha} \right) \| \underline{B} \|_2$$

Quindi, assumendo (i) e (ii), ϕ_λ lascia la sfera invariante se:

$$\rho \geq \frac{\tilde{\varepsilon}_+ + c(\lambda, (\| \underline{B} \|_2^2 + \rho^2)^{1/2})}{\alpha} \| \underline{B} \|_2 \qquad (2.2.10)$$

Segue allora, dall'ipotesi (iii) e dall'osservazione che fissati $\tilde{\varepsilon}_+$, $\tilde{\varepsilon}_-$, α, $\| \underline{B} \|$, si può trovare $\lambda_0 > 0$ tale che per $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ la (2.2.10) ha almeno una soluzione e quindi una minima e una massima denotate rispettivamente con $\rho_1(\lambda)$ e $\rho_2(\lambda)$.

In più è facile vedere che $\rho_2(\lambda) \to \infty$ e $\rho_1(\lambda) \to \frac{\tilde{\varepsilon}_+}{\tilde{\varepsilon}_-} \|\underline{B}\|_2$ quando $\lambda \to 0$ ■

Dal lemma dimostrato e dall'osservazione che (2.2.10) è infinitesima in $\|B\|_2$, si può ricavare il seguente:

<u>Corollario 2.2.11</u>: Supponiamo che sussistono (i) e (ii), allora per ogni scelta di λ, α, $\tilde{\varepsilon}_+$, $\tilde{\varepsilon}_-$ si possono trovare una costante $c_0 > 0$ e due funzioni positive σ_1 e σ_2 : $[0, c_0] \to \mathbb{R}^+$ tali che Φ_λ lascia invariata B_ρ per ρ tale che:

$\sigma_1(\|\underline{B}\|) \leq \rho \leq \sigma_2(\|\underline{B}\|)$.

In più $\sigma_1(a) \to 0$ e $\sigma_2(a) \to \infty$ quando $a \to 0$. □

Le stesse considerazioni fin qui fatte, possono essere ripetute senza alcun mutamento per la equazione (2.1.15). In altre parole, le soluzioni di (2.1.15) possono essere viste come punti fissi di una particolare applicazione Ψ_λ, costruita come Φ_λ con gli opportuni campbiamenti.

Per la verifica del punto (b) dimostriamo il seguente:

<u>Lemma 2.2.12</u>. Supponiamo (iii) e assumiamo che esistono due funzioni:

(iv) $g_\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ limitata su intervalli limitati

$p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ crescente, con $\lim_{\lambda \to 0} p(\lambda) = +\infty$

tali che:

$$\sup_{\rho \leq p(\lambda)} g_\lambda(\rho) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

e

$$\| \varphi_\lambda(w_1) - \varphi_\lambda(w_2) \|_\infty \leq \| w_1 - w_2 \|_2 \, g_\lambda(\|w_1\|_2 + \|w_2\|_2)$$

per tutte le coppie w_1, w_2 in H.

Allora, è possibile trovare valori di λ e ρ per cui ϕ_λ è una contrazione come applicazione da B_ρ in H.

<u>Dimostrazione:</u> dalle ipotesi e considerando che

$$Q^2_{\varepsilon_0}(w_1) - Q^2_{\varepsilon_0}(w_2) = \varphi_\lambda(w_1) - \varphi_\lambda(w_2)$$

si ha la stima:

$$\| \phi_\lambda(w_1) - \phi_\lambda(w_2) \|_2 \leq \| w_1 - w_2 \|_2 \, g_\lambda(\|w_1\|_2 + \|w_2\|_2) \cdot \| (Q_{\varepsilon_0}(w_1) + Q_{\varepsilon_0}(w_2))^{-1} \| \cdot$$

$$\left[\| Q_{\varepsilon_0}(w_1) + Q_{\varepsilon_0}(w_2) \| \left\| \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0}(w_1) A Q_{\varepsilon_0}(w_2)} \right\| + \| Q_{\varepsilon_0}(w_2) \|^2 \left\| \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0}(w_2) A Q_{\varepsilon_0}(w_1)} \right\| \|\underline{B}\|_2 \right]$$

ponendo: $\tilde{e}_\lambda(\rho) = \sup_{0 \le \sigma \le \rho} e(\lambda,\sigma)$

si conclude che se

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_+^{(1)} + \tilde{e}_\lambda(\rho) \quad , \quad \|w_1\|, \|w_2\| < \rho \qquad (2.2.13)$$

allora

$$\|\phi_\lambda(w_1) - \phi_\lambda(w_2)\| \le$$

$$\le \|w_1 - w_2\| \, g_\lambda(2\rho) \left(1 - \frac{\varepsilon_+^{(1)} + \tilde{e}_\lambda(\rho)}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_-}\right)^2 - 1\right] \|\underline{B}\|_2 \qquad (2.2.14)$$

Sia $\hat{\varepsilon}_0(\rho, \varepsilon_+^{(1)}, \varepsilon_-^{(1)}, \lambda)$ il punto di minimo assoluto della funzione:

$$T(\varepsilon_0) \doteq \left(1 - \frac{\varepsilon_+^{(1)} + \tilde{e}_\lambda(\rho)}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_-}\right) - 1\right]$$

definita in $\varepsilon_+^{(1)} + \tilde{e}_\lambda(\rho) \le \varepsilon_0 < +\infty$

Sia

$$K(\rho, \varepsilon_+^{(1)}, \varepsilon_-^{(1)}, \lambda) \doteq T_{\varepsilon_0}\big|_{\varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}_0}$$

Per $\varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}_0$, se $\|w_1\|_2, \|w_2\|_2 \le \rho$ si ha:

$$\|\phi_\lambda(w_1) - \phi_\lambda(w_1)\|_2 \le g_\lambda(2\rho) \, K(\rho, \varepsilon_+^{(1)}, \varepsilon_-^{(1)}, \lambda) \|\underline{B}\|_2 \|w_1 - w_2\|_2 \qquad (2.2.15)$$

Per ogni $\rho > 0$ sia $N_\rho \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definito da:

$$N_\rho = \{\lambda, b \mid g_\lambda(2\rho) \, K(\rho, \varepsilon_+^{(1)}, \varepsilon_-^{(1)}, \lambda) \, b < 1\} \qquad (2.2.16)$$

Poichè $g_\lambda(\sigma) \to 0$ uniformemente su insiemi limitati, per $\|\underline{B}\|_2$ fissati e per ogni $\rho > 0$ si può trovare $\lambda_1(\rho, \|\underline{B}\|_2)$ tale che:

$$(\lambda, \|\underline{B}\|_2) \subset N_\rho \qquad \forall \; 0 \le \lambda \le \lambda_1 \qquad (2.2.17)$$

Similmente, per λ fissati e ogni $\rho > 0$ si può trovare $\beta_1(\lambda, \rho)$ tale che: $(\lambda, \|B\|_2) \subset N_\rho \quad \forall \; 0 \le \|\underline{B}\|_2 \le \beta_1$ ■

Dai lemmi precedenti si ricava immediatamente il seguente:

Teorema 2.2.18: Assumiamo (i),(ii), (iii), (iv). Allora, per $\underline{B}$ fissato è possibile trovare un $\lambda_1 > 0$ e due funzioni $\underset{\sim}{\rho}_1 \le \underset{\sim}{\rho}_2$ definite in $[0, \lambda_1]$ e a valori in $\mathbb{R}^+$, con $\underset{\sim}{\rho}_2 \to +\infty$ quando $\lambda \to 0$, tali che, per tutti $0 \le \lambda \le \lambda_1$, l' equazione (2.1.11) ha un' unica so-

luzione in $B_{\underset{\sim}{\rho}_2(\lambda)}$. La norma di questa soluzione non supera il valore di $\underset{\sim}{\rho}_1(\lambda)$.
D'altra parte, per $\lambda > 0$ fissato, si può trovare $\beta_1 > 0$ e due funzioni $\underset{\sim}{\sigma}_1 \leq \underset{\sim}{\sigma}_2 : [0, \beta_1] \to \mathbb{R}^+$, $\sigma_2(\beta) \to \infty$, $\sigma_1(\beta) \to 0$ quando $\beta \to 0$ tali che, per tutti $\underline{B}$ con $0 \leq \|\underline{B}\| \leq \beta$, l'equazione $(2.1.11)$ ha una unica soluzione in $B_{\sigma_2(\|\underline{B}\|)}$. La norma di questa soluzione non supera il valore di $\sigma_1(\|\underline{B}\|)$.

<u>Dimostrazione :</u> I risultati seguono direttamente dal lemma $(2.2.6)$ e dal lemma $(2.2.12)$.

2.3 <u>Rappresentazione per la costante dielettrica effettiva. (Caso non lineare)</u>.

Definiremo la costante dielettrica effettiva nel modo seguente:

$$\varepsilon^* \doteq \frac{1}{|S|}\int_S (\underline{B}(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(\underline{x})\underline{E}(\underline{x}))d\underline{x} = \frac{1}{|S|} < \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})\underline{E} > \quad (2.2.19)$$

con $(\cdot,\cdot)$ prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$, $<\cdot,\cdot>$ prodotto scalare in H.

Usando la $(2.1.11)$ e ricordando che $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})(\underline{x}) = 1 - Q^2_{\varepsilon_0}(\underline{E})(x)$,

si ottiene, per tutti gli ε_0 per cui vale l'equazione $(2.1.11)$.

$$\varepsilon^* = \frac{1}{|S|\|\underline{B}\|_2^2}\left\{< \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{E})\underline{B} > - \varepsilon_0 < Q_{\varepsilon_0}\underline{B}, Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0}} Q_{\varepsilon_0}\underline{B} >\right\} \quad (2.2.20)$$

Indicando con μ_{ε_0} la misura di Borel positiva sulla retta reale (misura spettrale) associata all'operatore $Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0}$ relativa al vettore non normalizzato $Q_{\varepsilon_0}\underline{B}$, si vede facilmente che:

$$\varepsilon^* = \frac{1}{|S|\|\underline{B}\|_2^2}\left\{< \underline{B}, \underline{\underline{\varepsilon}}(E)\underline{B} > - \varepsilon_0 \int_{\sigma(Q_{\varepsilon_0} A Q_{\varepsilon_0})} \frac{\lambda}{1-\lambda}\, d\mu_{\varepsilon_0}(\lambda)\right.$$

In alcuni casi è possibile lasciar cadere la restrizione che λ oppure $\|\underline{\beta}\|$ sia piccolo e dimostrare il risultato di unicità della soluzione anche per valori del parametro di non linearità abbastanza grandi. Ad esempio questo avviene nel caso in cui sfere identiche di piccolo raggio, con tensore dielettrico non lineare, sono poste nei centri di un reticolo cubico che è immerso in un mezzo omogeneo isotropo di tensore dielettrico $\varepsilon \cdot \mathrm{I}$. Per maggiori dettagli vedi [2] .

CAPITOLO III : Caso probabilistico

Considereremo il caso in cui la distribuzione del dielettrico non è data in maniera dettagliata, ma è conosciuta solo attraverso una distribuzione di probabilità.
Nel capitolo che segue dimostreremo che anche in questo caso la descrizione del problema attraverso equazioni del tipo (2.1.11) e (2.1.15) con opportuni operatori A e Q_{ε_0} ancora adeguata.
Riusciremo, in questo modo, a costruire una rappresentazione per il campo elettrico, e conseguentemente della costante dielettrica effettiva, in un mezzo "stocastico". I risultati sono applicabili, quasi senza alcun cambiamento sia al caso lineare che al caso non lineare.
Per semplicità daremo i risultati solamente nel caso lineare.

(3.1) Richiami:

Per precisare in maniera dettagliata lo schema matematico in cui rientra il problema che stiamo per affrontare, preferiamo richiamare preliminarmente e sinteticamente alcuni concetti di Teoria delle Probabilità, Teoria Ergodica e sui Gruppi Unitari a un parametro su uno spazio di Hilbert, che saranno utilizzati per tutto il capitolo.

Teoria delle Probabilità.

Definizione 3.1.1. : Sia Ω un insieme i cui elementi verranno denominati eventi elementari. Sia $\mathfrak{F}(\Omega)$ una σ-algebra di Ω ossia una famiglia di sottoinsiemi di Ω chiusa rispetto alle operazioni (in numero finito o numerabile) di unione, intersezione e complementazione. Consideriamo, inoltre, su $\mathfrak{F}(\Omega)$ una misura μ positiva, σ-additiva, a massa totale uguale a uno. Definiremo spazio di probabilità la tripla $(\Omega, \mathfrak{F}(\Omega), \mu)$.

Definizione 3.1.2 : Sia $(\Omega, \mathfrak{F}(\Omega), \mu)$ uno spazio di probabilità. Una funzione f definita in Ω a valori in uno spazio vettoriale V, misurabile su Ω (cioè $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}(\Omega)$ per ogni A insieme di Borel di V) sarà chiamata "variabile stocastica a valori in V".

Definizione (3.1.3) : Sia $f : \Omega \to V$ una variabile stocastica a valori in V. La misura su V definita da:

$$\mu_f(A) = \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\} \quad \text{con } A \text{ boreliano di } V$$

è chiamata funzione di distribuzione di f.

Definizione (3.1.4) : Siano $f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)$ n variabili stocastiche a valori in V. La misura su V^n definita da:

$$\mu_{f_1,\dots,f_n}(A) = \mu\{\omega \in \Omega : f_1(\omega) \in A_1, \dots, f_n(\omega) \in A_n\}$$

con A_i insieme di Borel di V, per $i = 1, 2, \dots, n$

è denominata distribuzione congiunta di $f_1 \dots f_n$.

Definizione (3.1.5) : Definiamo campo stocastico l'applicazione:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \Omega \to V$$

misurabile.

E' ovvio che per $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ fissato $f(\underline{x}, \cdot)$ è una variabile stocastica a valori in V.

Definizione (3.1.6) : Un campo stocastico tale che le distribuzioni congiunte di $f_1(\underline{x}_1, \omega), \dots, f(\underline{x}_n, \omega)$ per ogni $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ siano uguali alle distribuzioni congiunte di $f(\underline{x}_1 + \underline{h}, \omega), \dots, f(\underline{x}_n + \underline{h}, \omega)$ per ogni $\underline{h} \in \mathbb{R}^3$, verrà indicato come campo stocastico strettamente stazionario.

Teoria Ergodica.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di probabilità e τ_t un gruppo di trasformazioni da Ω in Ω, con $t \in \mathbb{R}$

Definizione (3.1.7) : Diremo che la misura μ è invariante rispetto a τ_t se fissato $s \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\mu(\tau_s^{-1} F) = \mu(F) \qquad \forall F \in \mathcal{F}(\Omega)$$

In questo caso si può anche dire che τ_t preserva la misura μ.

Definizione (3.1.8) : Consideriamo $H = L^2(\Omega, d\mu)$ con μ misura invariante. Sia $f \in H$. Definiamo l'applicazione: $T_t : f \to f \circ \tau_t$

ovvero $(T_t f)(\omega) = f(\tau_t(\omega))$.

<u>Lemma (3.1.9) (di Koopman)</u>: T_t è un operatore unitario da H su H. $\forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Dimostrazione</u>: Usiamo l'invarianza della misura:

$$(T_t f, T_t g) = \int_\Omega \bar{f}(\tau_t(\omega))\, g(\tau_t(\omega))\, d\mu(\omega) =$$

$$= \int_\Omega \bar{f}(\omega')\, g(\omega')\, d\mu(\tau_t^{-1}\omega') =$$

$$= \int_\Omega \bar{f}(\omega')\, g(\omega')\, d\mu(\omega') = (f, g)$$

Poichè $T_t T_{-t} = T_0 = I$, T è invertibile e così unitario. ■

<u>Definizione (3.1.10)</u>: Una trasformazione τ_t è chiamata **ergodica** se le uniche funzioni di $L^2(\Omega, d\mu)$ taliche:

$$f \circ \tau_t = f \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

sono le funzioni costanti.

E' utile esprimere l'ergodicità in termini di misure.

<u>Proposizione (3.1.11)</u>: τ_t è ergodica se, e solo se, per tutti gli insiemi misurabili $F \subset \Omega$

$$\tau_t^{-1}(F) = F \quad \forall t \implies \mu(F) = 0 \text{ oppure } \mu(F) = 1$$

<u>Dimostrazione</u>: Supponiamo che τ_t sia ergodico e $\tau_t^{-1}(F) = F \ \forall t \in \mathbb{R}$. Allora, $f = \chi_F$ (funzione caratteristica di) è una funzione invariante, ovvero: $f \circ \tau_t = f$; così χ_F è costante quasi ovunque il che implica $\mu(F) = 0$ oppure $\mu(F) = 1$.

Inversamente supponiamo che la seconda condizione sussista. Allora $\{w \mid f(w) < a\}$ è invariante sotto τ_t così $f(w) < a$ quasi ovunque oppure $f(w) \geq a$ quasi ovunque. Poichè questo è vero per tutti gli a, $f(w)$ è costante quasi ovunque. ■

Gruppi unitari ad un parametro - Teorema di Stone.

Definizione (3.1.12): Un applicazione $t \to T_t$ da $\mathbb{R}$ nello spazio degli operatori su uno spazio di Hilbert, soddisfacente a:

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$ T_t è un operatore unitario e $T_{t+s} = T_t T_s$ per tutti $s, t \in \mathbb{R}$

(ii) se $f \in H$ e $t \to t_0$, allora $T_t f \longrightarrow T_{t_0} f$

è chiamata Gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo.

Teorema (3.1.13) (di Stone): Sia T_t un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo su uno spazio di Hilbert H. Allora, esiste un operatore autoaggiunto A tale che:

$$T_t = e^{itA}$$

Dimostrazione: vedi per esempio [10]

Definizione (3.1.14): Se T_t è un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo, allora l'operatore autoaggiunto A tale che $T_t = e^{itA}$ è chiamato generatore infinitesimale di T_t.

Utile per la caratterizzazione dei generatori infinitesimali dei gruppi è il seguente:

Teorema (3.1.15): Sia T_t un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo. Sia D un dominio denso che è invariante sotto T_t e su cui T_t è fortemente differenziabile nell'origine:

cioè, esiste $\lim_{t \to 0} \dfrac{T_t f - f}{t}$ $\quad \forall f \in D$

Allora: $\frac{1}{i}$ volte la derivata forte di T_t è essenzialmente autoaggiunta su D e la sua chiusura è il generatore infinitesimale di T_t.

Dimostrazione: vedi [10]

Spesso è utile il seguente:

Teorema (3.1.16): Sia A un generatore infinitesimale di un gruppo

T_t fortemente continuo e sia D un insieme lineare denso in $D(A)$. Se per tutti $t \in \mathbb{R}$, $T_t : D \to D$ (lascia invariato D) allora, D è un "nucleo" per A, nel senso che la chiusura di A ristretto a D è uguale ad A.

Dimostrazione: vedi [10]

Noi ci serviremo di una generalizzazione del Teorema di Stone.

Teorema (3.1.17)(Stone generalizzato): Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \longmapsto T_{\underline{x}} \equiv T_{x_1,\dots,x_n}$ un'applicazione fortemente continua di $\mathbb{R}^n$ negli operatori unitari su uno spazio di Hilbert H tale che: $T_{\underline{x}+\underline{y}} = T_{\underline{x}}\, T_{\underline{y}}$ e $T_{\underline{0}} = I$

Allora: esiste un dominio D di essenziale autoaggiuntezza per ognuno del generatori L_j dei sottogruppi ad un parametro: $T_{0,\dots,x_j,\dots,0}$; ogni $L_j : D \to D$ e gli L_j commutano.

Dimostrazione: vedi [10]

(3.2) Formulazione del problema probabilistico.

Per semplicità, nel seguito tratteremo nei dettagli solo il caso in cui $\underline{\underline{\varepsilon}}(x,\omega)$, il tensore dielettrico, non dipende dal campo elettrico $\underline{E}$; in più, ci porremo nelle condizioni di trattare il problema di un mezzo dielettrico infinito a cui è applicato un campo elettrico esterno costante. Comunque, i risultati che si ottengono sono generalizzabili sia al caso non lineare, sia al caso di una regione limitata di $\mathbb{R}^3$ con particolari condizioni al bordo.

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), \mu)$.

Sia $\underline{\underline{\varepsilon}}(x,\omega) = (\varepsilon_{ij}(x,\omega))$ un campo stocastico strettamente stazionario a valori tensoriali, con $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \Omega$, $i,j = 1,2,3$

Su $\underline{\underline{\varepsilon}}(x,\omega)$ facciamo le seguenti assunzioni:

(i) esistono $\alpha, \beta > 0$ reali, indipendenti da $\underline{x}$ e da ω tali che:
$$\alpha \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(x,\omega)\xi_i \xi_j \le \beta \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 \quad \text{per ogni } \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$$

(ii) $\varepsilon_{ij}(x,\omega) = \varepsilon_{ji}(x,\omega)$ per tutti $i,j = 1,2,3$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \omega \in \Omega$. (3.2.1)

Per la definizione (3.1.6) le distribuzioni congiunte di: $\varepsilon_{ij}(\underline{x}_1,\omega),\ldots\ldots,\varepsilon_{ij}(\underline{x}_n,\omega)$ sono le stesse di $\varepsilon_{ij}(\underline{x}_1+\underline{h},\omega),\ldots$ $\ldots\varepsilon_{ij}(\underline{x}_n+\underline{h},\omega)$ per ogni n-pla di punti $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ di $\mathbb{R}^3$ e per ogni vettore $\underline{h}\in\mathbb{R}^3$. Più specificamente, assumeremo che esiste un gruppo di trasformazioni $\tau_{\underline{x}}$, $\underline{x}\in\mathbb{R}^3$ da Ω in Ω che è 1-1 e preserva la misura μ di probabilità. $\tau_{\underline{x}}$ sarà, inoltre, assunto ergodico. Il gruppo di trasformazioni $\tau_{\underline{x}}$ agisce su Ω, induce un gruppo di operatori (vedi Lemma (3.1.9)) sullo spazio di Hilbert delle funzioni a valori reali, $L^2(\Omega,d\mu)$, con prodotto scalare:

$$(\tilde{f},\tilde{g})=\int_\Omega \tilde{f}(\omega)\,\tilde{g}(\omega)\,d\mu(\omega)\ ;\ \tilde{f},\tilde{g}\in L^2(\Omega,d\mu)$$

Il gruppo di operatori $T_{\underline{x}}$ su $L^2(\Omega,d\mu)$ è dato da:

$$(T_{\underline{x}}\tilde{f})(\omega)=\tilde{f}(\tau_{-\underline{x}}(\omega))\qquad \underline{x}\in\mathbb{R}^3$$

Poichè $\tau_{\underline{x}}$ preserva la misura, gli operatori $T_{\underline{x}}$ formano un gruppo unitario su $L^2(\Omega,d\mu)$, fortemente continuo. Indichiamo con L_K i generatori antiautoaggiunti $[(iL_K)=(iL_K)^*]$ dei sottogruppi $T_{t\hat{K}}$ dove $\hat{K}=1,2,3$ è il versore della K-sima direzione. Per definizione:

$$L_K f=\lim_{t\to 0}\frac{T_{t\hat{K}}f-f}{t}\doteq\left.\frac{\partial T_{\underline{x}}}{\partial x_K}\right|_{\underline{x}=0}$$

con il limite definito in senso di convergenza in $L^2(\Omega,d\mu)$ per elementi f nel dominio di L_K. Gli L_K sono autoaggiunti, chiusi, densamente definiti con domini D_i. Al sottoinsieme chiuso di $L^2(\Omega,d\mu)$

$$H^1=\bigcap_{i=1}^{3}D_i \qquad (3.2.2)$$

si può dare una struttura di spazio di Hilbert definendo il prodotto interno:

$$(\tilde{u},\tilde{v})=\int_\Omega \tilde{u}(\omega)\tilde{v}(\omega)\,d\mu(\omega)+\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega L_i\tilde{w}(\omega)\,L_i\tilde{v}(\omega)\,d\mu(\omega)$$

H^1 potrà essere considerato uno spazio di Sobolev probabilistico. Consideriamo il seguente problema elettrostatico: Trovare un campo vettoriale stocastico stazionario $E_i(x,\omega)$ $i=1,2,3$ tale che:

(I)
$$\frac{\partial}{\partial x_j}E_i(x,\omega)=\frac{\partial}{\partial x_i}E_j(x,\omega)\qquad i,j=1,2,3 \qquad (3.2.3)$$

$$\text{(II)} \quad \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ij}(\underline{x},\omega)\, E_j(\underline{x},\omega) \right) = 0 \qquad (3.2.3)$$

con ε_{ij} soddisfacente (i) e (ii)

e che soddisfa inoltre:

$$\text{(III)} \quad \int E_i(\underline{x},\omega)\, d\mu(\omega) = B_i \qquad i = 1,2,3$$

con $\underline{B}$ vettore costante assegnato.

Nell'ambito della formulazione fin qui data al problema è possibile dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione di $(3.2.3)$ attraverso il lemma di Lax-Milgram.

<u>Proposizione $(3.2.4)$</u>: Il problema $(3.2.3)$ ammette una ed una soluzione in $L^2(\Omega, d\mu)$

<u>Dimostrazione</u>:

Poichè ogni cosa che riguarda $(3.2.3)$ deve essere stazionaria, noi cercheremo soluzioni E_i nella forma: $E_i(\underline{x},\omega) = \tilde{E}_i(\tau_{-x}\omega)$ $(3.2.5)$

Consideriamo lo spazio di Hilbert H così definito:

$$\tilde{H} = \left\{ \tilde{f}_i(\omega) \in H \quad i = 1,2,3 \;\middle|\; L_i \tilde{f}_j = L_j \tilde{f}_i \text{ in senso debole e } \int_\Omega f_i(\omega)\, d\mu(\omega) = 0 \right\}$$

Consideriamo il seguente problema variazionale:

Trovare $\tilde{G}_i(\omega)$ in $\tilde{H}$ tale che:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) \left(\tilde{G}_j(\omega) + B_j \right) \tilde{f}_i(\omega)\, d\mu(\omega) = 0 \qquad \forall \tilde{f}_i \in H \quad i=1,2,3.$$

Poichè sussiste l'ipotesi $(3.2.1)$ questo problema ha un'unica soluzione per il lemma di Lax-Milgram.

Chiaramente: $\tilde{E}_i(\omega) = \tilde{G}_{T_i}(\omega) + \bar{E}_i$

è l'unica soluzione di (3.2.3) attraverso (3.2.5). ■

(3.3) Equazioni di Maxwell nel caso probalistico.

In questo paragrafo dimostreremo come sia possibile riformulare opportunamente il problema (3.2.3) in termini di un'equazione nello spazio di Hilbert $L^2(\Omega, d\mu)$

L'obiettivo verrà raggiunto costruendo esplicitamente l'operatore A di proiezione.

Come abbiamo già visto, il teorema di Stone ci assicura che i generatori infinitesimali L_K del gruppo $T_{\underline{x}}$ hanno un nucleo denso H^1 comune, che ha struttura di spazio di Hilbert.

Definizione 3.3.1 : Indicheremo con $\underset{\sim}{A}$ l'operatore definito in $(H^1)^3$ nel modo seguente:

$$(\underset{\sim}{A} f)_K(\omega) \doteq L_K \frac{1}{L^2}\left(\sum_{j=1}^{3} L_j f_j\right)(\omega)$$

$$\forall f \equiv (f_1, f_2, f_3) \quad \text{con } f_i \in L^2(\Omega, d\mu) \cap H^1 \quad i = 1,2,3.$$

e con $L^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i^2$

Osservazione 3.3.2 : E' immediato verificare che essendo gli L_i operatori autoaggiunti chiusi, l'operatore $\underset{\sim}{A}$ è chiudibile su $(H^1)^3$.

Inoltre, A è uniformemente limitato da I su H^1.

Definizione 3.3.3 : Denoteremo con A l'estensione a $(L^2(\Omega, d\mu))^3$ di $\underset{\sim}{A}$.

Osservazione 3.3.4 : A è un operatore di proiezione, commuta con $T_{\underline{x}}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ e in più $T_{\underline{x}}$ lascia invariante H^1.

Lemma 3.3.5 : Le equazioni (3.2.3) sono equivalenti a:

$$\text{(I)} \quad A\underline{E}(\omega) = \underline{E}(\omega) - \underline{B}$$

$$\text{(II)} \quad A\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\omega)\underline{E}(\omega) = 0 \qquad (3.3.6)$$

dove $\underline{\underline{\varepsilon}}(\omega) = \underline{\underline{\varepsilon}}(0,\omega)$

con la condizione

$$\int d\mu(\omega)\, E(\omega) = \underline{B}$$

<u>Dimostrazione</u>:

Consideriamo lo spazio di Hilbert $H^1(\Omega)$ definito in $(3.2.2)$.
Indichiamo con $H^{-1}(\Omega)$ il duale di $H^1(\Omega)$.

(1) Vogliamo provare che:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\, \varepsilon_{ij}(\underline{x},\omega)\, E_j(\underline{x},\omega) \doteq$$

$$\doteq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\varepsilon_{ij}(\underline{x}+t\hat{\imath},\omega)\, E_j(\underline{x}+t\hat{\imath},\omega) - \varepsilon_{ij}(\underline{x},\omega) E_j(\underline{x},\omega)\Big)$$

esiste come elemento di $H^{-1}(\Omega)$.

Infatti, se $\varphi \in H^1(\Omega)$ si ha:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega (L_i\varphi)(\omega)\Big(\varepsilon_{ij}(\omega)\, E_j(\omega)\Big)\, d\mu(\omega) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \varphi(\omega)\Big(\big(T_{t\hat{\imath}} - I\big)\varepsilon_{ij}(\omega)\, E_j(\omega)\Big)\, d\mu(\omega) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \varphi(\omega)\Big(\varepsilon_{ij}(t\hat{\imath},\omega)\, E_j(t\hat{\imath},\omega) - \varepsilon_{ij}(0,\omega)\, E_j(0,\omega)\Big)\, d\mu(\omega)$$

L'equazione (II) di $(3.2.3)$ sarà, quindi, soddisfatta se, e solo se

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega (L_i\varphi)(\omega)\,(\varepsilon_{ij}(\omega)\, E_j(\omega)\; d\mu(\omega) = 0 \qquad (3.3.7)$$

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$

Ma (3.3.7) ci dice che $\underline{E}(\omega)$ è soluzione debole di:

$$\sum_{i,j=1}^{3} L_i\left(\varepsilon_{ij}(\omega)\, E_j(\omega)\right) = 0$$

che è equivalente a (II) di (3.3.6).

Nello stesso modo proviamo che:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_j(\underline{x},\omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} E_i(\underline{x},\omega) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\left(E_j(\underline{x}+t\hat{\imath},\omega) - E_j(\underline{x},\omega)\right) - \left(E_i(\underline{x}+t\hat{\jmath},\omega) - E_i(\underline{x},\omega)\right)\right]$$

esiste come elemento di $H^{-1}(\Omega)$.

In più $\frac{\partial}{\partial x_i} E_j(\underline{x},\omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} E_i(\underline{x},\omega) = 0$ è equivalente a (in senso debole) a $\quad L_i E_j - L_j E_i = 0 \quad i,j = 1,2,3 \qquad (3.3.8)$

Ora, se $\underline{E}$ è soluzione di (I) di (3.3.6) allora:

$$E_i = L_i \frac{1}{L^2} \sum_{k=1}^{3} L_k E_k + B_i$$

$$E_j = L_j \frac{1}{L^2} \sum_{k=1}^{3} L_k E_k + B_j$$

essendo $\underline{B}$ un vettore costante si ha che:

$$L_j E_i - L_i E_j = \left(L_j L_i - L_j L_i\right)\left(\frac{1}{L^2}\sum_{k=1}^{3} L_k E_k\right) = 0$$

Nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che L_i e L_j commutano $\forall i,j = 1,2,3$. Viceversa se $\underline{E} - \underline{B}$ è soluzione di (3.3.8) sarà anche soluzione di (I) di (3.3.6).

Infatti: $L_j(E_i - B_i) = L_i(E_j - B_j)$ in senso debole, cioè:

$$\int_\Omega L_j(E_i - B_i)\,\varphi\, d\mu(\omega) = \int_\Omega L_i(E_j - B_j)\,\varphi\, d\mu(\omega) \quad \forall \varphi \in H^1$$

da cui:

$$\int_\Omega (E_i - B_i)(L_j\varphi)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega L_i(E_j - B_j)\,\varphi\, d\mu(\omega) \quad \forall \varphi \in H^1$$

$$\int_\Omega L_i(E_i - B_i)(L_j\varphi)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega L_i^2(E_j - B_j)\,\varphi\, d\mu(\omega) \quad \forall \varphi \in H^1$$

essendo $\underline{B}$ costante si ha:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} L_i E_i (L_j\varphi)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} L_i^2(E_j - B_j)\,\varphi\, d\mu(\omega) \quad \forall \varphi \in H^1$$

da $L^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i^2$ si ottiene:

$$\int_\Omega \frac{1}{L^2}\sum_{i=1}^{3} L_i E_i (L_j\varphi)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega (E_j - B_j)\,\varphi\, d\mu(\omega) \quad \forall \varphi \in H^1$$

ovvero: $L_j \frac{1}{L^2}\sum_{i=1}^{3} L_i E_i = E_j - B_j$ ■

Definiamo $\mathcal{E}_+$, ε_- come nelle definizioni (1.2.1) e (1.2.2) con gli inf; e i sup; presi su Ω.

Per $\varepsilon_0 \geq \mathcal{E}_+$ e $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_-$ definiamo rispettivamente Q_{ε_0} e Q'_{ε_0} come facevamo nelle definizioni (1.2.3) e (1.2.13).

Facendo uso del lemma (3.3.1) si dimostra, come abbiamo già fatto nel teorema (1.2.7), il seguente teorema:

<u>Teorema 3.3.9</u>: Le soluzioni del problema (3.2.3) possono essere

così rappresentate:

(1) per $\varepsilon_o \geqslant \varepsilon_+$

$$\underline{E} = \underline{B} + A Q_{\varepsilon_o} \frac{1}{1 - Q_{\varepsilon_o} A Q_{\varepsilon_o}} Q_{\varepsilon_o} \underline{B}$$

(2) per $0 < \varepsilon_o \leqslant \varepsilon_-$

$$\underline{E} = \underline{B} - A Q'_{\varepsilon_o} \frac{1}{1 - Q'_{\varepsilon_o} A Q'_{\varepsilon_o}} Q'_{\varepsilon_o} \underline{B}$$

N.B. $\underline{E} = \underline{E}(\underline{x}, \omega) \qquad Q_{\varepsilon_o} = Q_{\varepsilon_o}(\underline{x}, \omega)$

E', ovviamente, possibile anche in questo caso ricavare formule di rappresentazione per ε^* nel modo già visto nel Cap. 1 e Cap. 2.

BIBLIOGRAFIA

1 G.F. Dell'Antonio, E. Orlandi, R. Figari
Representation and expansions for the eletric field, the effective dielectic constant and analogous quantities in inhomogeneous or random media.
Preprint Centre de Physique Theorique - CNRS - Luminy (France), '84

2 G.F. Dell'Antonio
Existence and rapresentation theorems for non-linear electrostatics in inhomogeneous or random medium.
Preprint Z.I.F. Bielefeld, '84

3 G. Papanicolaou, S. Varadhan
Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. in Colloquia Mathematica Societatis Janos Boyai, 29,'79; North Holland, 1982

4 K. Golden, G. Papanicolaou
Bounds for effective parameter of heterogeneous media by analitic continuation
Comm. Math. Phys., 90, 473, '83

5 W. Kohler, G. Papanicolaou
Bounds for effective conductivity of random media
Springer Lecture Notes in Physics, 154, p.111, '82

6 M. Beran
Statistical Continuum Theories
Wiley, New York, '68

7 D.J. Bergman

The dieletric constant of a composite material.

Physics Reports, C43, 377, '78

8 D.J. Bergman

Resonances in the bulk properties of composite media.

Springer Lecture Notes in Physics, 154, '82, p.10

9 M. Miksis

Effective dielectric constants of a non linear composite material.

Preprint Courant Institute, '82

10 M. Reed, B. Simon

Functional Analysis.

Accademic Press, New York, '72

11 S. Varadhan

Stocastic Processes.

Courant Institute Mathematica Sciences New York University, New York '68