



# ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO  
"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

TEORIA DI MORSE E SISTEMI HAMILTONIANI

CANDIDATO :

Dott. V. COTI ZELATI

RELATORE :

Prof. A. AMBROSETTI

Anno Accademico 1983/84

**TRIESTE**

M

INDICE

INTRODUZIONE, p. 2

CAPITOLO I: Richiami di omologia

- § 0. Introduzione, p. 4
- § 1. Omologia di complessi, p. 4
- § 2. Omologia singolare, p. 6
- § 3. Casi speciali, p. 10

CAPITOLO II: Teoria di Morse per G-varietà

- § 0. Introduzione, p. 12
- § 1. G-varietà, p. 12
- § 2. Teoria di Morse per G-varietà, p. 14

CAPITOLO III: Teoremi di esistenza di punti critici per funzionali  $S^1$  invarianti e loro perturbazioni

- § 0. Introduzione, p. 27
- § 1. Esistenza di punti critici, p. 27
- § 2. Teoremi di perturbazione per funzionali  $S^1$  invarianti, p. 31

CAPITOLO IV: Applicazioni

- § 0. Introduzione, p. 34
- § 1. Esistenza di soluzioni, p. 34

BIBLIOGRAFIA, p. 42

## INTRODUZIONE

Scopo di questo lavoro é di esporre la teoria di Morse in spazi infinito dimensionali nel caso in cui siano presenti varietà di punti critici. Tipico caso in cui ciò avviene é quello in cui il problema studiato presenti un certo tipo di simmetria. L'uso di questa teoria é poi illustrato applicandola alla ricerca di soluzioni periodiche per un sistema hamiltoniano del secondo ordine non convesso, problema che presenta una naturale simmetria sotto l'azione del gruppo  $S^1$ .

La teoria di Morse, introdotta da M. Morse per spazi di di mensione finita ([Mo],[Mi],[B3]) ed estesa successivamente da Palais a varie tà modellate su spazi di Hilbert ([P],[MP1]) permette di legare la struttura omologica di una varietà all'esistenza e alla natura dei punti critici di fun zionali definiti sulla varietà in questione. Come conseguenza di ciò, la teoria di Morse ha trovato interessanti applicazioni sia in topologia algebrica ([H],[Mi]), sia in analisi.

Per quanto riguarda le applicazioni all'analisi non lineare, citiamo ad esempio i lavori di [Pr],[MP1] per problemi di biforcazione, [MP2] per la perturbazione, [Ch],[A1],[A2],[AL],[L] per equazioni differenziali di tipo variazionale.

A partire poi dal lavoro di Bott [B1],[B2] la teoria di Morse finito dimensionale é stata estesa al caso in cui i punti critici siano presenti in varietà non degeneri in un senso opportuno. Motivazione fondamenta le per questa estensione é stata il problema delle geodetiche chiuse su varie tà compatte (si veda [K1],[K2],[B2]). L'estensione al caso infinito dimensio nale é dovuta a Wasserman [W1],[W2].

I risultati più recenti nell'ambito della teoria di Morse sono in parte legati al problema delle geodetiche chiuse (teoria di Morse equivariante [B2],[Hi], comportamento di punti critici isolati degeneri [GM1])

[CM2]) e in parte legati ad una generalizzazione della teoria di Morse a flussi ("indice di Conley" [CZ], [Pa], [BP]).

Per quanto riguarda le applicazioni della teoria di Morse a sistemi hamiltoniani segnaliamo il lavoro di Ekeland ([E]), che sfruttando appieno le informazioni fornite dalla teoria di Morse trova un notevole risultato di esistenza per soluzioni periodiche ad energia fissata. Segnaliamo anche il lavoro di Chang ([Ch]) che contiene risultati assai simili al nostro.

Il lavoro è organizzato come segue: nel primo capitolo vengono richiamate definizioni, proprietà e principali teoremi della teoria omologica; nel secondo capitolo viene esposta la teoria di Morse per  $G$ -varietà e vengono dimostrate le diseguaglianze di Morse relative; il terzo capitolo è dedicato alla dimostrazione di teoremi astratti di esistenza di punti critici per funzionali  $S^1$ -invarianti, teoremi utilizzati poi in parte nel capitolo finale per dimostrare esistenza e molteplicità di soluzioni  $2\pi$ -periodiche del sistema di equazioni differenziali del secondo ordine  $-\ddot{x} = V'(x) + f(t)$ .

Vogliamo infine sottolineare che tutti i risultati originali qui esposti sono stati ottenuti in collaborazione con il Prof. A. Ambrosetti, che sentitamente ringraziamo.

CAPITOLO I: RICHIAMI DI OMOLOGIA

§ 0. Introduzione

Scopo del presente capitolo é di richiamare alcuni risultati di teoria dell'omologia necessari allo sviluppo della teoria di Morse. Ovviamente sono state tralasciate le dimostrazioni. Per una trattazione dettagliata si veda [D] e, per una trattazione assiomatica, [Sp] e [ES].

In particolare nel §1 vengono introdotti astrattamente i concetti di omologia di complessi, di successione esatta, di operatore di bordo, di omotopia fra catene. Nel §2 viene costruita l'omologia singolare di uno spazio topologico (di una coppia di spazi topologici) e mostrata la sua invarianza per omotopia. Nell'ultimo paragrafo sono calcolati i gruppi di omologia di alcuni spazi che rivestiranno notevole importanza nelle applicazioni.

§ 1. Omologia di complessi

1.1. Definizione. Un complesso  $K$  é una successione

$$\dots \longleftarrow K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \longleftarrow \dots$$

di gruppi abeliani  $K_n$  e di omomorfismi  $\partial_n$ , detti operatori di bordo, tali che  $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Diciamo  $n$ -catene gli elementi di  $K_n$ ,  $n$ -cicli gli elementi di  $Z_n K = \ker(\partial_n) = \partial_n^{-1}(0)$ ,

$n$ -bordi gli elementi di  $B_n K = \text{im}(\partial_{n+1}) = \partial_{n+1}(K_{n+1})$ . Si noti che  $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$  implica

che  $B_n K \subset Z_n K$ . Possiamo quindi considerare il quoziente  $H_n K = Z_n K / B_n K$ ,  $n$ -esimo

gruppo di omologia di  $K$ . I suoi elementi sono detti classi d'omologia  $n$ -dimensionali. Dati due complessi  $K$  e  $K'$  definiamo come applicazione fra catene  $f: K' \rightarrow K$  una sequenza di omomorfismi  $f_n: K'_n \rightarrow K_n$  t.c.  $\partial_n \cdot f_n = f_{n-1} \cdot \partial'_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .

La relazione  $\partial_n \cdot f_n = f_{n-1} \cdot \partial'_n$  implica che  $f$  induce un omomorfismo

$$f_* = H_n f : H_n K' \longrightarrow H_n K$$

$$[z'] \longrightarrow (H_n f)[z'] = [fz']$$

1.2. Definizione. Se  $K$  é un complesso e  $K'_n \subset K_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  é una successione di sottogruppi tali che  $\partial(K'_n) \subset K'_{n-1} \quad \forall n$ , allora

$$\dots \xleftarrow{\partial'} K'_n \xleftarrow{\partial'} K'_{n+1} \xleftarrow{\partial'} \dots \quad \partial' = \partial / K'$$

é pure un complesso e l'inclusione  $i: K' \longrightarrow K$  é un'applicazione fra catene.  $K'$  é detto sottocomplesso di  $K$ .

1.3. Definizione. Una successione  $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$  di omomorfismi fra gruppi abeliani  $A, B, C$  é detta esatta in  $B$  se  $\ker(\beta) = \text{im}(\alpha)$ . Una successione

$$\dots \longrightarrow A_{-2} \longrightarrow A_{-1} \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots$$

é esatta se é esatta in  $A_j \quad \forall j$ .

Una successione esatta della forma  $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \longrightarrow 0$  é detta successione esatta corta.

1.4. Proposizione. Se  $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$  é una successione esatta di applicazioni fra catene (cioè se  $0 \longrightarrow K'_n \xrightarrow{i} K_n \xrightarrow{p} K''_n \longrightarrow 0$  é esatta  $\forall n$ ) allora la successione

$$HK' \xrightarrow{i_*} HK \xrightarrow{p_*} HK''$$

é esatta in  $HK$ .

1.5. Definizione. Sia

$$(1.1) \quad 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di applicazioni di catene. Si considerino gli omomorfismi

$$H_{n-1} K' \xleftarrow{\bar{\partial}} p^{-1}(Z_n K'') \xrightarrow{\bar{p}} H_n K''$$

ove  $\bar{p}x = [px]$  e  $\bar{\partial}x = [i^{-1} \partial x]$ . E' lecito passare al quoziente per ottenere l'omomorfismo (unico):

$$\partial_* = \bar{\partial} p^{-1} : H_n K'' \longrightarrow H_{n-1} K'$$

definito da  $\partial [px] = [i^{-1} \partial x]$ .

1.6. Proposizione.

a) Naturalità: se

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{p} & K'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{j} & L & \xrightarrow{q} & L'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

é un diagramma commutativo di applicazioni fra catene con righe esatte, allora anche il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_n K'' & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1} K' \\ f''_* \downarrow & & \downarrow f'_* \\ H_n L'' & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1} L' \end{array}$$

é commutativo.

b) Esattezza: la successione

$$(1.2) \quad \dots \longrightarrow H_n K' \xrightarrow{i_*} H_n K \xrightarrow{p_*} H_n K'' \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1} K' \xrightarrow{i_*} H_{n-1} K \xrightarrow{p_*} \dots,$$

detta successione d'omologia della (1.1), é esatta.

1.7. Definizione. Siano  $f, g: K \rightarrow K'$  applicazioni fra catene. Un'omotopia di catena fra  $f$  e  $g$  (in simboli  $f \cong g$ ) é una successione di omomorfismi  $s_n: K_n \rightarrow K'_{n+1}$  tali che

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Se un tale  $s$  esiste diciamo che  $f$  e  $g$  sono omotope.

1.8. Proposizione. La relazione d'omotopia di catena é una relazione d'equivalenza.

1.9. Proposizione. Se  $f \cong g: K \rightarrow K'$ , allora  $f_* = g_*: HK \rightarrow HK'$ .

§ 2. Omologia singolare

2.1. Definizione. Il  $q$ -simplexso standard  $\Delta_q$  consiste di tutti i punti  $x \in \mathbb{R}^{q+1}$  tali che:

(a)  $0 \leq x_i \leq 1 \quad i=0,1,\dots,q$

(b)  $\sum_{i=0}^q x_i = 1$

2.2. Definizione. Un'applicazione  $f$  da  $\Delta_q$  in  $\mathbb{R}^n$  (o in  $A \subset \mathbb{R}^n$ ) é detta lineare se esiste un'applicazione lineare (nel senso usuale del termine)  $F: \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $F|_{\Delta_q} = f$ .

2.3. Osservazione. Le applicazioni lineari di  $\Delta_q$  sono completamente determinate dai loro valori sui vertici; questi valori possono essere arbitrariamente prescritti. Definiamo

(2.1)  $\varepsilon^j = \varepsilon_q^j: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$

ove  $\varepsilon^j(e^i) = e^i$  per  $i < j$ ,  $\varepsilon^j(e^i) = e^{i+1}$  per  $i \geq j$ .

2.4. Lemma.  $\varepsilon_{q+1}^j \varepsilon_q^k = \varepsilon_{q+1}^k \varepsilon_q^{j-1}$

2.5. Definizione. Sia  $X$  uno spazio topologico. Un  $q$ -simplexso singolare di  $X$  é un'applicazione continua  $\sigma = \sigma_q: \Delta_q \rightarrow X$ ,  $q \geq 0$ . Consideriamo il gruppo abeliano libero  $S_q X$  generato dall'insieme di tutti i  $q$ -simplexsi singolari. Gli elementi  $c \in S_q X$  sono chiamati  $q$ -catene singolari di  $X$ . Per  $q < 0$  poniamo  $S_q X = 0$ .

Definiamo poi un omomorfismo  $\partial_q: S_q X \rightarrow S_{q-1} X$  ponendo:

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{j=0}^q (-1)^j (\sigma_q \varepsilon_q^j).$$

2.6. Proposizione. La successione

$$\dots \leftarrow S_{q-1} X \xleftarrow{\partial_q} S_q X \xleftarrow{\partial_{q+1}} S_{q+1} X \leftarrow \dots$$

é un complesso, i.e.  $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ . E' detto il complesso singolare di  $X$  ed é indicato con  $SX$ .

2.7. Osservazione. Se  $f: X \rightarrow Y$  é un'applicazione continua e  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  é un simplexso singolare di  $X$ , allora  $f \circ \sigma: \Delta_q \rightarrow Y$  é un simplexso singolare in  $Y$ , e otteniamo un omomorfismo

$$S_q f: S_q X \rightarrow S_q Y \quad \text{definito da} \quad (S_q f)(\sigma) = f \circ \sigma$$

2.8. Proposizione. La successione  $S_q f: S_q X \rightarrow S_q Y$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  è una applicazione fra catene  $Sf: SX \rightarrow SY$ , che indicheremo anche con  $f: SX \rightarrow SY$ .

2.9. Proposizione.  $S(gf) = (Sg)(Sf)$ ,  $S(id_X) = id_{SX}$ .

2.10. Osservazione. Se  $i: A \rightarrow X$  è l'inclusione, allora  $i: SA \rightarrow SX$  è iniettiva.  $SA$  può essere pensato come sottocomplesso in  $SX$ . Il quoziente  $S(X,A) = SX/SA$  è detto il complesso singolare relativo di  $(X,A)$ . Se  $j$  indica il passaggio al quoziente, allora

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow SA \xrightarrow{i} SX \xrightarrow{j} S(X,A) \rightarrow 0$$

è una successione esatta di applicazioni fra catene. Si noti che in ciascuna dimensione si ha  $S_q X \cong S_q A \oplus S_q(X,A)$ . Si osservi anche che  $S(X,\emptyset) = SX$ .

2.11. Definizione. Una coppia di spazi topologici  $(X,A)$  consiste di uno spazio  $X$  topologico e di un suo sottospazio  $A$ . Se  $(X,A), (Y,B)$  sono coppie di spazi, si definisce come applicazione fra le coppie  $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  un'applicazione (continua)  $f$  da  $X$  in  $Y$  tale che  $f(A) \subset B$ .

2.12. Osservazione. Un'applicazione fra coppie  $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  induce un diagramma commutativo di applicazioni fra catene:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & SA & \rightarrow & SX & \rightarrow & S(X,A) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow S(f|_A) & & \downarrow Sf & & \downarrow \overline{Sf} & & \\ 0 & \rightarrow & SB & \rightarrow & SY & \rightarrow & S(Y,B) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

con righe esatte.

2.13. Definizione. I gruppi di omologia (singolare) di uno spazio  $X$  (di una coppia di spazi  $(X,A)$ ) sono i gruppi di omologia del complesso singolare  $SX$  (risp.  $S(X,A)$ ). Poniamo  $HX = HSX$  e  $H(X,A) = HS(X,A)$ . Poniamo inoltre  $R_q(X,A) = \dim H_q(X,A)$   $q$ -esimo numero di Betti di  $(X,A)$  e

$$(2.3) \quad S_k(X,A) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} R_m(X,A)$$

$$(2.4) \quad \chi(X,A) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_m(X,A) = \text{caratteristica di Eulero di } (X,A).$$

2.14. Osservazione. Se  $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  é un'applicazione fra coppie, allora  $Sf: S(X,A) \rightarrow S(Y,B)$  induce un omomorfismo  $Hf = f_*: H(X,A) \rightarrow H(Y,B)$  tale che  $H(fg) = Hf \cdot Hg$ ,  $H(id) = id$ .

2.15. Osservazione. L'omomorfismo di connessione (definito nella 1.5)

$$\partial_*: H_{q+1}(X,A) \rightarrow H_q A \text{ della successione esatta}$$

$$0 \rightarrow SA \xrightarrow{i} SX \xrightarrow{j} S(X,A) \rightarrow 0$$

é detto l'omomorfismo di connessione di  $(X,A)$  e la successione esatta corrispondente (si veda la proposizione 1.6)

$$(2.5) \quad \dots \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1} A \xrightarrow{i_*} H_{q+1} X \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q A \xrightarrow{i_*} H_q X \xrightarrow{j_*} \dots$$

é detta successione esatta d'omologia della coppia  $(X,A)$ .

2.16. Osservazione. Consideriamo ora una terna di spazi  $B \subset A \subset X$ ; scriviamo

$(X,A,B)$ . L'inclusione  $i$  e la proiezione  $j$  definiscono una successione esatta

$$0 \rightarrow S(A,B) \xrightarrow{i} S(X,A) \xrightarrow{j} S(X,A) \rightarrow 0$$

La successione esatta risultante (si veda di nuovo la proposizione 1.6)

$$(2.6) \quad \dots \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(A,B) \xrightarrow{i_*} H_{q+1}(X,B) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B) \xrightarrow{i_*} H_q(X,B) \rightarrow \dots$$

é detta successione esatta d'omologia della terna  $(X,A,B)$ . Va anche notata la commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(A,B) \\ & \searrow \partial_* & \nearrow j' \\ & H_q A & \end{array}$$

2.17. Definizione. Ricordiamo che due applicazioni continue  $f,g: X \rightarrow Y$  si dicono omotope se esiste  $\theta: [0,1] \times X \rightarrow Y$  con  $\theta(0,.)=f$ ,  $\theta(1,.)=g$ . Analogamente per applicazioni fra coppie.

2.18. Proposizione. Se  $f,g: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  sono omotope, allora  $Sf, Sg: S(X,A) \rightarrow S(Y,B)$  sono omotope come applicazioni fra catene (si veda la def. 1.7)

2.19. Corollario. Se  $f,g: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  sono omotope, allora

$$f_* = g_*: H(X,A) \rightarrow H(Y,B).$$

In particolare, se  $(X,A) \simeq (Y,B)$  (cioé sono omotopicamente equivalenti; signifi-

ca che esistono  $i_1: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  e  $i_2: (Y,B) \rightarrow (X,A)$  tali che  $i_2 \circ i_1$  é omotopo all'identità su  $(X,A)$  e  $i_1 \circ i_2$  é omotopo all'identità su  $(Y,B)$  allora  $H(X,A) \cong H(Y,B)$ .

2.20. Proposizione. (proprietà di excisione) Se  $(X,A)$  é una coppia di spazi e  $Y \subset X$  é tale che  $\overset{\circ}{Y} \cup \overset{\circ}{A} = X$ , allora  $j: S(Y, Y \cap A) \simeq S(X,A)$  ove  $j$  é l'inclusione. Se  $B \subset A$  é tale che  $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$ , allora  $j: S(X-B, A-B) \simeq S(X,A)$ . In particolare  $j_*: H(Y, Y \cap A) \cong H(X,A)$ , risp.  $j_*: H(X-B, A-B) \cong H(X,A)$ .

### § 3. Casi speciali

3.1. Se  $P$  é un punto si ha:

$$H_0 P = \mathbb{Z} \quad H_i P = 0 \quad \forall i \neq 0$$

3.2. Se  $X \neq \emptyset$  é un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^n$ , allora:

$$H_0 X = \mathbb{Z} \quad H_i X = 0 \quad \forall i \neq 0$$

3.3. Se  $Y \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \neq \emptyset$  abbiamo:

$$H_1(\mathbb{R}^n, Y) = H_0 Y \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_q(\mathbb{R}^n, Y) = H_{q-1} Y \quad \text{se } q \neq 1$$

3.4. Se  $X \neq \emptyset$  é connesso per cammini,  $H_0 X = \mathbb{Z}$ .

3.5. Definizione. Se  $i: A \rightarrow X$  é una coppia di spazi,  $A$  é detto un retratto di  $X$  se esiste  $r: X \rightarrow A$  tale che  $r \circ i = \text{id}$ ; un tale  $r$  é detto una retrazione.

3.6. Proposizione. Se  $A$  é un retratto di  $X$ , la successione d'omologia di  $(X,A)$  si decompone nella successione esatta corta

$$0 \rightarrow H_q A \xrightarrow{i_*} H_q X \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \rightarrow 0$$

3.7. Definizione. Se  $i: A \rightarrow X$  é una coppia di spazi,  $A$  é detto un retratto di deformazione di  $X$  se esiste un'omotopia  $\Theta(t, \cdot): X \rightarrow X$  con  $\Theta(0, \cdot) = \text{id}_X$ ,  $\Theta(1, X) \subset A$  e  $\Theta(1, A) = \text{id}_A$ . Quindi  $\Theta(1, \cdot)$  definisce una retrazione  $r: X \rightarrow A$  con  $i \circ r = \Theta(1, \cdot)$ . Si ha che  $r \circ i = \text{id}_A$  e  $\Theta: \text{id}_X \simeq i \circ r$ . In particolare  $i, r$  sono equivalenze omotopiche reciproche e quindi  $i_*: H A \cong H X$ .

3.8. Esempio.

$$H(S^{n-1}) = H(B^n - \{0\}) = H(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

3.9. Proposizione.

$$H_0(S^n) = \mathbb{Z}$$

$$H_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

$$H_k(S^n) = 0 \quad \text{se } k \neq 0, n$$

$$H_n(B^n, S^{n-1}) = \mathbb{Z}$$

$$H_k(B^n, S^{n-1}) = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - P) = \mathbb{Z}$$

$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - P) = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

CAPITOLO II: TEORIA DI MORSE PER G-VARIETA'

§ 0. Introduzione

In questo capitolo viene esposta la teoria di Morse per G-varietà. Sebbene sia possibile sviluppare la teoria di Morse anche senza il concetto di G-varietà, semplicemente considerando l'orbita di un punto critico come varietà critica ed applicando a questa varietà la teoria di Morse così come è sviluppata da Bott [B1], si è preferito seguire questa strada in quanto in numerose applicazioni è presente una simmetria naturale che un approccio di questo tipo rende più visibile. Nell'esposizione si è seguito il lavoro di Wasserman [W2].

Va osservato che recentemente la teoria di Morse per G-varietà ha avuto notevoli sviluppi, principalmente motivati dalla applicazione di questa teoria al problema delle geodetiche chiuse su varietà compatte. Si veda a tale proposito [B2], [Hi], [K2] ed anche [Pa].

§ 1. G-varietà

1.1. Definizione. Sia G un gruppo di Lie compatto e X uno spazio topologico.

Un'azione di G su X è un'applicazione  $\psi$  continua  $\psi: G \times X \rightarrow X$  tale che

(i)  $\psi(e, x) = x$   $\forall x \in X$

(ii)  $\psi(g_1 g_2, x) = \psi(g_1, \psi(g_2, x))$   $\forall x \in X$  e  $\forall g_1, g_2 \in G$

La coppia  $(X, \psi)$  sarà detta un G-spazio. Indicheremo con  $\bar{g}: X \rightarrow X$  l'applicazione data da  $\bar{g}(x) = \psi(g, x)$  e  $\psi(g, x)$  sarà abbreviato con  $gx$ . Poniamo:

$$X_G = \{ x \in X: gx = x \ \forall g \in G \} = \text{Fix}(G)$$

$$G_x = \{ g \in G: gx = x \} = \text{gruppo d'isotropia in } x.$$

$$\Omega_x = \{ y: y = gx, g \in G \} = \text{orbita di } x$$

Se Y è un altro G-spazio,  $f: X \rightarrow Y$  sarà detta equivariante se  $\forall g \in G$

$f \circ \bar{g} = \bar{g} \circ f$  e invariante se  $\forall g \in G \ f \circ \bar{g} = f$ .

1.2. Definizione. Sia M una varietà hilbertiana di classe  $C^k$  e  $(M, \psi)$  un G-spa

zio. Allora  $M$  è detta una  $G$ -varietà di classe  $C^k$  se  $\bar{g}: M \rightarrow M$  è di classe  $C^k$   $\forall g \in G$ .

1.3. Osservazione. Il fibrato tangente ad  $M$ ,  $T(M)$  di una  $G$ -varietà di classe  $C^{k+1}$  è una  $G$ -varietà di classe  $C^k$  dove l'azione è definita da  $gX = d\bar{g}_p(X)$   $\forall X \in T_p(M)$

1.4. Definizione. Siano  $E, B$   $G$ -varietà e  $\pi: E \rightarrow B$  un fibrato vettoriale hilbertiano. Allora  $\pi$  è un  $G$ -fibrato vettoriale se,  $\forall g \in G$ ,  $\bar{g}: E \rightarrow E$  è un'applicazione di fibrato, cioè se  $\bar{g} \circ \pi = \pi \circ \bar{g}$ . Ne segue che  $\pi$  è equivariante. Se inoltre  $\pi$  ammette una metrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\bar{g}$  è un'isometria  $\forall g \in G$ , allora  $\pi: E \rightarrow B$  è detta un  $G$ -fibrato vettoriale riemanniano. Se  $E$  è un  $G$ -fibrato vettoriale riemanniano, allora poniamo:

$$\begin{aligned} \|e\| &= \langle e, e \rangle^{1/2} \\ E(r) &= \{ e \in E : \|e\| \leq r \} \\ \overset{\circ}{E}(r) &= \{ e \in E : \|e\| < r \} \\ \partial E(r) &= \{ e \in E : \|e\| = r \} \end{aligned}$$

Porremo anche  $\partial E = \partial E(1)$ ,  $\overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{E}(1)$ .

Si noti che  $T(M) \rightarrow M$  è un  $G$ -fibrato vettoriale differenziabile (di classe  $C^k$  se  $M$  è di classe  $C^{k+1}$ ). Se  $T(M) \rightarrow M$  è un  $G$ -fibrato vettoriale riemanniano, allora  $M$  si dice  $G$ -spazio riemanniano.

1.5. Osservazione. Se  $M$  è una  $G$ -varietà e  $\Sigma \subset M$  è una sottovarietà compatta invariante, allora  $\pi: N(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ , il fibrato normale di  $\Sigma$  è un  $G$ -fibrato vettoriale differenziabile (si veda [H1] capitolo IV, §5); inoltre, per un teorema di Koszul [Ko], esiste un diffeomorfismo equivariante  $N(\Sigma) \rightarrow U$ , dove  $U$  è un intorno aperto di  $\Sigma$  in  $M$ .

Sia ora  $x \in M$  e supponiamo che  $Gx$  sia una sottovarietà (ciò è vero se l'applicazione  $G \rightarrow M$ ,  $g \mapsto gx$  è differenziabile). Poniamo:

$$\begin{aligned} B_x(r) &= N(Gx)(r) = \{ u \in N(Gx) : \|u\| \leq r \} = \text{intorno tubolare di } Gx \\ S_x(r) &= \pi^{-1}(x)(r) = \{ u \in \pi^{-1}(x) : \|u\| \leq r \} = \text{fetta in } x \quad (\text{dove } \pi: N(Gx) \rightarrow Gx) \end{aligned}$$

1.6. Osservazione. Sia  $X$  un campo vettoriale equivariante su  $M$ , sia cioè  $X_{gp} = gX_p$ . Se  $\sigma_p(t)$  denota la soluzione massimale di  $X$  di condizione iniziale  $p$  (cioè se  $\sigma: ]a, b[ \rightarrow M$ ,  $a < 0 < b$ ,  $\sigma(0) = p$ ,  $\sigma' = X \circ \sigma \quad \forall t \in ]a, b[$  e  $\sigma$  non può essere esteso al di fuori di  $]a, b[$ ) allora l'equivarianza di  $X$  implica che  $g\sigma_p(t)$  e  $\sigma_{gp}(t)$  sono entrambe soluzioni di  $X$  con condizione iniziale  $gp$ , e quindi, per l'unicità della soluzione (ipotizziamo sufficiente regolarità in  $X$  e  $M$ )  $g\sigma_p(t) = \sigma_{gp}(t)$ . Quindi il flusso generato da  $X$  è equivariante.

Se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione invariante sul  $G$ -spazio riemanniano  $M$ , allora  $f$  genera il campo vettoriale gradiente  $\nabla f$  definito da

$$\langle \nabla f_p, X \rangle = df_p[X]$$

Si noti che  $\langle g\nabla f_p, X \rangle = \langle \nabla f_p, g^{-1}X \rangle = df_p(g^{-1}X) = d(fg^{-1})_{gp}(X) = df_{gp}(X) = \langle \nabla f_{gp}, X \rangle \quad \forall X \in T(M)_{gp}$  da cui segue che  $g\nabla f_p = \nabla f_{gp}$  e quindi  $\nabla f$  è un campo vettoriale equivariante.

## § 2. Teoria di Morse per $G$ -varietà

D'ora in poi indicheremo con  $M$  un  $G$ -spazio riemanniano completo di classe  $C^2$ . Sia  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale di classe  $C^2$ ,  $G$ -invariante. Supporremo che  $f$  soddisfi:

(P.S.) Da ogni successione  $(x_n) \subset M$  tale che  $f(x_n)$  è limitata e  $\nabla f(x_n) \rightarrow 0$  è possibile estrarre una sottosuccessione  $(x_{n_k})$  convergente ad  $\bar{x}$ , con  $\nabla f(\bar{x}) = 0$

(R) Se  $x \in M$  è un punto critico per  $f$ , allora l'applicazione  $g: G \rightarrow Gx$  è differenziabile.

E' ben noto che (P.S.) implica (posto  $Z = \{x \in M : \nabla f(x) = 0\}$ ):

(2.1)  $\forall$  sottoinsieme chiuso  $S \subset M$  tale che  $f|_S$  è limitato e  $Z \cap S = \emptyset$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|\nabla f(u)\| \geq \delta > 0 \quad \forall u \in S$ .

(2.2)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad f^{-1}([a, b]) \cap Z$  è compatto;

La condizione (R) assicura invece che l'orbita di ciascun punto critico è una sottovarietà in M.

2.1. Definizione. Sia p un punto critico per f. Definiamo l'operatore hessiano  $\Phi(f)_p : T(M)_p \rightarrow T(M)_p$  per mezzo di  $\langle \Phi(f)_p v, w \rangle = H(f)_p[v, w]$  ove  $H(f)_p$  è la forma bilineare hessiana [P, §7]. Diremo indice di un punto critico p di  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$  la dimensione del più grande sottospazio V di  $T(M)_p$  su cui  $H(f)_p$  è definita negativa. Una sottovarietà chiusa invariante V di M sarà detta sotto varietà critica di f se  $\partial V = \emptyset$ ,  $V \cap \partial M = \emptyset$  e se ciascun  $p \in V$  è un punto critico per f. Segue da questa definizione che  $T(V)_p \subset \ker \Phi(f)_p$  ed è quindi possibile definire un operatore limitato autoaggiunto  $\bar{\Phi}(f)_p : T(M)_p / T(V)_p \rightarrow T(M)_p / T(V)_p$ . Se  $\bar{\Phi}(f)_p$  è un isomorfismo  $\forall p \in V$ , V è detta varietà critica non degenerare per f. Si noti che ogni punto appartenente ad una stessa varietà critica non degenerare ha lo stesso indice; tale indice comune viene detto indice della varietà critica in questione.

2.2. Definizione. Una funzione  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  è detta funzione di Morse per la G-varietà M se soddisfa (P.S.) e se  $Z(f)$  è l'unione di varietà critiche non degeneri senza punti interni.

Passiamo ora alla dimostrazione del lemma di Morse, che specifica il comportamento di una funzione di Morse nelle vicinanze di una varietà critica.

2.3. Lemma. Sia  $\pi: E \rightarrow B$  un G-fibrato vettoriale riemanniano di classe  $C^2$  e f una funzione di Morse di classe  $C^2$  su E che abbia B (cioè la sezione 0 del fibrato) come varietà critica non degenerare. Se B è compatto e  $f(B) = 0$  esiste un diffeomorfismo equivariante  $\Theta: E(r) \rightarrow E$  per un qualche  $r > 0$  tale che  $f(\Theta(e)) = \|Pe\|^2 - \|(1-P)e\|^2$  ove P è una proiezione di fibrato equivariante e ortogonale.

Dimostrazione. Sia  $E_x = \pi^{-1}(x)$ ,  $i_x: E_x \rightarrow E$ ,  $p_x: T(E)_x \rightarrow T(E)_x / T(B)_x$ . Si ha che  $d\pi_x: T(E)_x \rightarrow T(B)_x$  e  $i_x^{-1}(0) = T(E)_x$

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \circ i_x: E_x \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(f)_x: T(E)_x \rightarrow T(E)_x, \quad (f \circ i_x)_0: T(E)_x \rightarrow T(E)_x$$

Ricordiamo poi che dalle definizioni segue che:

$$T(E)_x \cong T(E)_x / T(B)_x \quad \text{e che}$$

$$\bar{\varphi}(f)_x: T(E)_x / T(B)_x \rightarrow T(E)_x / T(B)_x$$

Dalla commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{i_x} & E \\ f \circ i_x \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

e da quanto osservato sopra segue la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} T(E)_x \cong T(E)_x / T(B)_x & \xrightarrow{di_x} & T(E)_x \\ \downarrow \varphi(f \circ i_x)_0 & \searrow p_x & \downarrow \varphi(f)_x \\ T(E)_x / T(B)_x & \xrightarrow{\bar{\varphi}(f)_x} & T(E)_x / T(B)_x \\ \downarrow \cong & \searrow p_x & \downarrow \cong \\ T(E)_x & \xrightarrow{di_x} & T(E)_x \end{array}$$

e quindi si ha che,  $\forall x \in B$ ,  $\varphi(f \circ i_x)_0$  è un isomorfismo. Quindi, in ciascuna fibra,  $O$  è un punto critico non degenero (nell'accezione solita - si veda [P]) della funzione  $f \circ i_x$ , e quindi, per il lemma di Morse nella forma usuale (si veda [P, §7] e [C] per  $f$  solo  $C^2$ ), esiste un diffeomorfismo  $\theta_x$  che preserva l'origine,  $\theta_x: E_x \rightarrow E_x$  e una proiezione  $P_x$  tale che  $f \circ i_x \circ \theta_x(e) = \|P_x(e)\|^2 - \|(1-P_x)(e)\|^2$  in un intorno dell'origine.

Dobbiamo ora mostrare che  $\theta_x$  e  $P_x$  dipendono con regolarità da  $x$  e che le applicazioni risultanti  $\theta: E \rightarrow E$ ,  $P: E \rightarrow E$  sono equivarianti.

Sia  $\text{Hom}(E, E)$  il  $G$ -fibrato vettoriale su  $B$  di fibra  $\text{Hom}(E_x, E_x)$  in  $x$  ove  $\text{Hom}(E_x, E_x)$  denota lo spazio lineare degli operatori lineari limitati su  $E_x$  e dove l'azione di  $G$  su  $\text{Hom}(E, E)$  è definita da  $gT = \underline{g} \cdot T \cdot \bar{g}^{-1}$  ove  $T \in \text{Hom}(E_x, E_x)$  e  $gT \in \text{Hom}(E_x, E_x)$ . Identificheremo  $B \subset E$  con la sezione zero del fibrato.

Definiremo un'applicazione  $A: E \rightarrow \text{Hom}(E, E)$  equivariante e che preserva le fibre tale che:

- (i)  $A(e)$  é autoaggiunto  $\forall e \in E$
- (ii)  $f(e) = \langle A(e)e, e \rangle$
- (iii) se  $x \in B$ ,  $\bar{\varphi}(f)_x \cdot p_x \cdot di_x = 2p_x \cdot di_x \cdot A(x)$

la (iii) é illustrata nel seguente diagramma commutativo:

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccccc} E_x = T(E)_x \circlearrowleft & \xrightarrow{di_x} & T(E)_x & \xrightarrow{p_x} & T(E)_x / T(B)_x \\ 2A(x) \downarrow & & \downarrow \varphi(f)_x & & \downarrow \bar{\varphi}(f)_x \\ E_x = T(E)_x \circlearrowleft & \xrightarrow{di_x} & T(E)_x & \xrightarrow{p_x} & T(E)_x / T(B)_x \end{array}$$

A é definito da

$$\langle A(e)v_1, v_2 \rangle = \int_0^1 (1-t) d^2(f \cdot \psi^{-1})_{\psi(te)} [d\psi_{te} [\bar{v}_1], d\psi_{te} [\bar{v}_2]] dt$$

dove  $\psi: \mathfrak{n}^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  é una carta per il fibrato E in  $\mathfrak{n}(e)$  e  $\bar{v}_i$  denota il vettore tangente a  $te$  corrispondente a  $v_i \in E_{\mathfrak{n}(e)}$ , cioé

$$\bar{v}_i = (di_{\mathfrak{n}(e)})_{te} [v_i]. \text{ Si noti che } i_{\mathfrak{n}(e)}: E_{\mathfrak{n}(e)} \rightarrow E \text{ e quindi}$$

$$(di_{\mathfrak{n}(e)})_{te}: [T(E_{\mathfrak{n}(e)})]_{te} \cong E_{\mathfrak{n}(e)} \rightarrow T(E)_{te}$$

La proprietá (i) segue dalla simmetria di  $d^2(f \cdot \psi^{-1})$  e (iii) segue notando che  $tx = x$  se  $x \in B$  (infatti B é identificato con la sezione 0 del fibrato E); infatti:

$$\begin{aligned} \langle A(x)v_1, v_2 \rangle &= \int_0^1 (1-t) d^2(f \cdot \psi^{-1})_{\psi(x)} [d\psi_x [\bar{v}_1], d\psi_x [\bar{v}_2]] dt \\ &= (1/2) d^2(f \cdot \psi^{-1})_{\psi(x)} [d\psi_x [\bar{v}_1], d\psi_x [\bar{v}_2]] \\ &= (1/2) d(d(f \circ \psi^{-1}))_{\psi(x)} [d\psi_x [\bar{v}_1], d\psi_x [\bar{v}_2]] \\ &= (1/2) d \left\{ df(\psi^{-1}(\psi(x))) [d\psi^{-1}(\psi(x))] \right\} [d\psi_x [\bar{v}_1], d\psi_x [\bar{v}_2]] \\ &= (1/2) d^2 f(x) \left[ d\psi^{-1}(\psi(x)) [d\psi_x [\bar{v}_1]], d\psi^{-1}(\psi(x)) [d\psi_x [\bar{v}_2]] \right] + \\ &\quad + (1/2) df(x) \left[ d^2 \psi^{-1}(\psi(x)) [d\psi_x [\bar{v}_1], d\psi_x [\bar{v}_2]] \right] = \quad (df(x)=0) \\ &= (1/2) d^2 f(x) [\bar{v}_1, \bar{v}_2] \\ &= (1/2) d^2 f(x) \left[ (di_x)_x [v_1], (di_x)_x [v_2] \right] \\ &= (1/2) d^2 f(x) [di_x [v_1], di_x [v_2]] \end{aligned}$$

Si noti poi che:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(f \circ i_x) v_1, v_2 \rangle &= d^2(f \circ i_x)(x) [v_1, v_2] \\ &= d[df(i_x(x)) [di_x]] [v_1, v_2] \\ &= d^2 f(x) [di_x v_1, di_x v_2] + df(x) [d^2 i_x [v_1, v_2]] \\ &= d^2 f(x) [di_x [v_1], di_x [v_2]] \end{aligned}$$

In definitiva, si ottiene che  $2A(e) = \varphi(f \circ i_x)$ . La (iii) segue dalla commutatività del diagramma (2.3).

Poichè  $f(B) = 0$  per ipotesi e  $df|_B = 0$  la formula di Taylor per  $f$  con  $n=1$  (nella fibra  $E_{n(e)}$ ) implica che:

$$f(e) = \int_0^1 (1-t) d^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(te)} [d\psi_{te} [\bar{e}], d\psi_{te} [\bar{e}]] dt = \langle A(e)e, e \rangle$$

e vale quindi anche (ii).

Per mostrare che  $A$  è ben definito consideriamo un'altra carta  $(\zeta, U)$  del fibrato. Differenziando  $(f \circ \zeta^{-1}) \circ (\zeta \circ \psi^{-1}) = f \circ \psi^{-1}$  e osservando che  $\zeta \circ \psi^{-1}$  è lineare in ciascuna fibra segue che  $d^2(\zeta \circ \psi^{-1})_e [\bar{v}_1, \bar{v}_2] = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in E_{n(e)}$ .

Quindi:

$$\begin{aligned} d^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(e)} [d\psi_e [\bar{v}_1], d\psi_e [\bar{v}_2]] &= d^2(f \circ \zeta^{-1})_{\zeta(e)} [d\zeta_e [\bar{v}_1], d\zeta_e [\bar{v}_2]] + \\ &\quad + d(f \circ \zeta^{-1})_{\zeta(e)} [d^2(\zeta \circ \psi^{-1})_{\psi(e)} [d\psi_e [\bar{v}_1], d\psi_e [\bar{v}_2]]] \\ &= d^2(f \circ \zeta^{-1})_{\zeta(e)} [d\zeta_e [\bar{v}_1], d\zeta_e [\bar{v}_2]] \end{aligned}$$

e ne segue che  $A$  è ben definito.

Per dimostrare l'equivarianza di  $A$ , notiamo che se  $\psi$  è una carta in  $n(e)$ , vale:

$$(\bar{g} \times \text{id}) \circ \psi \circ \bar{g}^{-1}: n^{-1}(gU) \xrightarrow{\bar{g}^{-1}} n^{-1}(U) \xrightarrow{\psi} U \times F \xrightarrow{\bar{g} \times \text{id}} gU \times F$$

e quindi  $\varphi = (\bar{g} \times \text{id}) \circ \psi \circ \bar{g}^{-1}$  è una carta in  $n(ge)$ .

Quindi:

$$\langle A(ge)gv_1, gv_2 \rangle = \int_0^1 (1-t) d^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(tge)} [d\varphi_{tge} [\bar{g}v_1], d\varphi_{tge} [\bar{g}v_2]] dt$$

Poniamo

$$F = f \circ \varphi^{-1} = f \circ \bar{g} \circ \psi^{-1} \circ (\bar{g}^{-1} \times \text{id}) = f \circ \psi^{-1} \circ (\bar{g}^{-1} \times \text{id})$$

$$f_1 = f \circ \psi^{-1} \quad f_2 = (\bar{g}^{-1} \times \text{id}) \quad v_i = d\varphi_{tge} (\bar{g}v_i) \quad F = f_1 \circ f_2$$

$$\varphi(tge) = (\bar{g} \times \text{id}) \circ \psi \circ \bar{g}^{-1}(tge) = (\bar{g} \times \text{id}) \circ \psi(te)$$

abbiamo che:

$$d^2(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(tge))[v, w] = d^2 f_1(\psi(te))[df_2(\varphi(tge))[v], df_2(\varphi(tge))[w]] + \\ + df_1(\psi(te))[d^2 f_2(\varphi(tge))[v_1, v_2]]$$

$$d\varphi_{tge}[v] = d(\bar{g} \times id \circ \psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[v] \\ = d(f_2^{-1})(\psi(te))[d(\psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[v]]$$

$$df_2(\varphi(tge))[d\varphi_{tge}[v]] = df_2(f_2^{-1}(\psi(te)))[d(f_2^{-1})(\psi(te))[d(\psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[v]]] \\ = d(\psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[v]$$

Notando che  $f_2$  é lineare in ciascuna fibra si ha:

$$d^2(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(tge))[d\varphi(tge)[\bar{g}v], d\varphi(tge)[\bar{g}w]] = \\ = d^2 f_1(\psi(te))[d(\psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[\bar{g}v], d(\psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[\bar{g}w]]$$

Dalla commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccc} E_{n(ge)} & \xrightarrow{\bar{g}^{-1}} & E_n(e) \\ \downarrow i_{n(ge)} & & \downarrow i_n(e) \\ E & \xrightarrow{\bar{g}^{-1}} & E \end{array}$$

segue poi la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} E_{n(ge)} \cong T_{tge} E_{n(ge)} & \xrightarrow{d(\bar{g}^{-1})(tge)} & T_{te} E_n(e) = E_n(e) \\ \downarrow di_{n(ge)}(tge) & & \downarrow di_n(e)(te) \\ T_{tge} E & \xrightarrow{d(\bar{g}^{-1})(tge)} & T_{te} E \end{array}$$

Ne segue che

$$di_{n(e)}(te) \circ d(\bar{g}^{-1})(tge) = d(\bar{g}^{-1})(tge) \circ di_{n(ge)}(tge)$$

$$d(\psi \circ \bar{g}^{-1})(tge)[\bar{g}v] = d\psi(te)[d\bar{g}^{-1}(tge)[di_{n(ge)}(tge)[gv]]] \\ = d\psi(te)[di_{n(e)}(te)[d(\bar{g}^{-1})(tge)[gv]]]$$

Poiché  $\bar{g}: E_n(e) \rightarrow E_{n(ge)}$  é lineare, abbiamo che  $d\bar{g}^{-1} = \bar{g}^{-1}$ , per cui:

$$\begin{aligned}
 &= d\psi(te) [di_{\pi(e)}(te) [v]] \\
 &= d\psi(te) [\bar{v}]
 \end{aligned}$$

In definitiva:

$$d^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(tge)} [d\varphi_{tge} [\bar{g}\bar{v}], d\varphi_{tge} [\bar{g}\bar{w}]] = d^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(te)} [d\psi_{te} [\bar{v}], d\psi_{te} [\bar{w}]]$$

Quindi

$$\langle A(ge)gv, gw \rangle = \langle A(e)v, w \rangle$$

e perciò  $A(ge) = g \circ A(e) \circ g^{-1}$  in quanto la metrica è invariante.

La costruzione procede ora esattamente, in ciascuna fibra, come in [P], §7 dove si vede che  $\Theta$  e  $P$  sono limiti di polinomi in  $A$  e quindi equivarianti e differenziabili. ■

**2.4. Proposizione.** Se  $f$  è una funzione di Morse, l'insieme dei punti critici di  $f$  in  $f^{a,b} = f^{-1}[a,b]$  è l'unione di un numero finito di varietà critiche compatte e non degeneri.

**Dimostrazione.** La compattezza dell'insieme dei punti critici in  $f^{a,b}$  non è altro che la proprietà (2.2). Dal lemma 2.3 segue poi che ciascuna varietà critica è isolata. ■

**2.5. Teorema.** Sia  $f$  una funzione di Morse su  $M$ ,  $\partial M = \emptyset$ , tale che  $f^{a,b} \cap Z = \emptyset$ . Se  $f^{a-\delta, b-\delta}$  è completo per un qualche  $\delta > 0$ , allora  $f^a = f^{-1}(-\infty, a]$  è equivariantemente diffeomorfo ad  $f^b$ .

**Dimostrazione.** La dimostrazione si effettua deformando  $f^a$  mediante le linee di flusso del campo vettoriale gradiente  $-\nabla f$ . Più precisamente, si definisce l'applicazione  $p \mapsto \alpha_p(\alpha(f(p)))$ , ove  $\alpha_p$  è la soluzione massimale (si veda l'osservazione 1.6) del campo vettoriale gradiente e  $\alpha$  è un'opportuna funzione  $C^\infty$ . ■

**2.6. Definizione.** Siano  $V, W$   $G$ -fibrati riemanniani su  $B$ . Il fibrato  $V(1) \oplus W(1) = \{(x,y) \in V \oplus W : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$  (che non è una varietà) è detto handle-bundle di tipo  $(V,W)$  con indice = dimensione di  $W$ .

Siano  $N, M$   $G$ -varietà con bordo,  $N \subset M$  e

$\bar{F}: V(1) \oplus W(1) \rightarrow M$  un omeomorfismo su un sottoinsieme chiuso  $H$  di  $M$ . Sia  $F = \bar{F}|_{V(1) \oplus W(1)}$ . Scriveremo  $M = N \cup_F H$  e diremo che  $M$  si ottiene da  $N$  attaccando un handle-bundle di tipo  $(V, W)$  se:

- (i)  $M = N \cup H$
- (ii)  $F$  é un diffeomorfismo equivariante suriettivo su  $H \cap \partial N$
- (iii)  $\bar{F}|_{V(1) \oplus W(1)}$  é un diffeomorfismo equivariante su  $M-N$ .

Il seguente lemma sarà utilizzato nella dimostrazione del teorema centrale della teoria, il teorema 2.9.

2.7. Lemma. Sia  $\pi: E \rightarrow B$  un  $G$ -fibrato vettoriale riemanniano e  $P$  una proiezione ortogonale di fibrato. Sia  $V = P(E)$ ,  $W = (1-P)(E)$ . Definiamo  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  come:

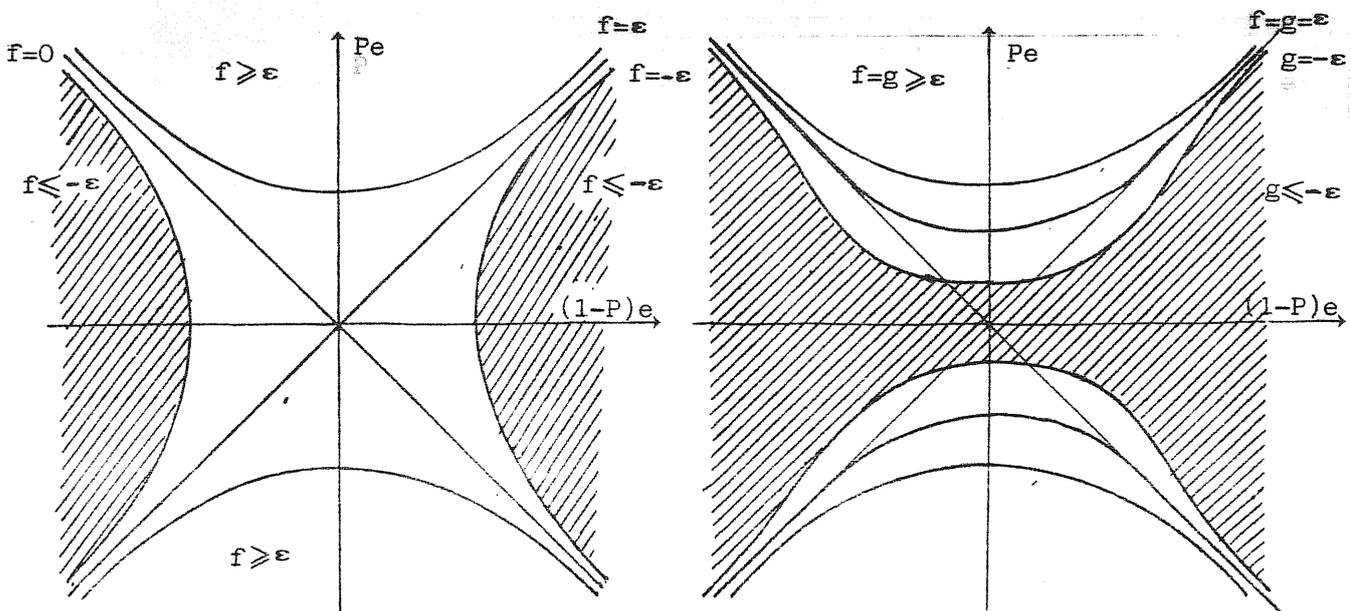
$$f(e) = \|Pe\|^2 - \|(1-P)e\|^2$$

$$g(e) = f(e) - (3/2)\epsilon \lambda(\|Pe\|^2/\epsilon)$$

ove  $\epsilon > 0$  e  $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\lambda$  monotona decrescente,  $\lambda([0, 1/2]) = 1$  e  $\lambda(1) = 0$ .

Allora  $\{x \in E(2\epsilon) : g(x) \leq -\epsilon\}$  si ottiene da  $\{x \in E(2\epsilon) : f(x) \leq -\epsilon\}$  attaccando un handle bundle di tipo  $(V, W)$ .

2.8. Osservazione. Si noti che  $f=g$  per  $\|Pe\|^2 > \epsilon$ , cioè lontano dalla varietà critica per  $f$  (definita da  $\|Pe\|=0$ ). In particolare  $\{f \geq \epsilon\} = \{g \geq \epsilon\}$



Dimostrazione del lemma 2.7. Sia  $\alpha(s)$  l'unica soluzione di

$$\lambda(\alpha)/(1+\alpha) = 2/3(1-s) \quad \text{per } s \in [0,1].$$

Si definisca

$$\begin{aligned} \bar{F}: V(1) \oplus W(1) &\longrightarrow E \\ (x,y) &\longmapsto \bar{F}(x,y) = (\epsilon \alpha(\|x\|^2) \|y\|^2 + \epsilon)^{1/2} x + (\epsilon \alpha(\|x\|^2))^{1/2} y \end{aligned}$$

Si vede, esattamente come nel paragrafo 11 di [P] che  $\bar{F}$  ha le proprietà cercate. ■

Si noti che nel lemma 2.7  $B$  è una varietà critica non degenera di  $f$ . Per il lemma di Morse, possiamo scegliere coordinate per  $\pi: E \rightarrow B$  e una proiezione  $P$  tale che  $f(e) = \|Pe\|^2 - \|(1-P)e\|^2$  in un intorno di  $B$  per ogni funzione  $f$  che abbia  $B$  come varietà critica non degenera. Con abuso di notazione, diremo che un handle-bundle di tipo  $(P(E), (1-P)E)$  è un handle-bundle di tipo  $(B, f)$ .

2.9. Teorema. Sia  $f$  una funzione di Morse su un  $G$ -spazio  $M$  riemanniano completo.

Se  $f$  ha un unico valore critico  $a < c < b$  nell'intervallo limitato  $[a, b]$ , allora l'insieme dei punti critici di  $f$  in  $[a, b]$  è l'unione disgiunta di un numero finito di sottovarietà compatte  $B_1, \dots, B_s$ , e  $f^b$  è equivariantemente diffeomorfa ad  $f^a$  con  $s$  handle-bundle di tipo  $(B_i, f)$  attaccati in modo disgiunto.

Dimostrazione. Va dimostrata ancora solo l'ultima affermazione. Siano  $\{U_i, i=1, \dots, s\}$  intorni tubolari disgiunti delle sottovarietà critiche  $B_i$  definiti dalle applicazioni  $T_i: N(B_i)(2\delta) \rightarrow U_i$  ove  $N(B_i)$  è il fibrato normale a  $B_i$  in  $M$  con la metrica indotta. Possiamo assumere  $c=0$  e per il lemma di Morse che  $f \circ T_i(x) = \|P_i x\|^2 - \|(1-P_i)x\|^2$  dove  $P_i$  è un proiettore ortogonale di fibrato in  $N(B_i)$ . Si scelga  $\epsilon$  tale che  $0 < \epsilon < \delta^2$  e  $a < -3\epsilon$ ,  $3\epsilon < b$ .

Sia  $Q = f^{-1}(-2\epsilon, \infty)$  e si definisca  $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \bigcup_{i=1}^s U_i \\ f(x) - (3\epsilon/2) \lambda(\|P_i T_i^{-1}(x)\|^2 / \epsilon) & \text{se } x \in U_i \end{cases}$$

ove  $\lambda$  è la funzione definita nel lemma 2.7. Si ha che  $g$  ha la stessa regolarità di  $f$  e che  $g^\epsilon = (f|_Q)^\epsilon$  (infatti  $f(x) \geq \epsilon$  implica  $\|PT^{-1}x\|^2 \geq \epsilon$  implica  $g(x) = f(x)$  implica  $g(x) \geq \epsilon$ ). Inoltre, per il lemma 2.7,  $g^{-\epsilon}$  è equiva-

riantemente diffeomorfo a  $(f|_Q)^{-\varepsilon} \cup$  (s-handle bundle di tipo  $(B_i, f)$ ).  
 Poichè  $f$  non ha valori critici in  $[a, -\varepsilon]$  o  $[\varepsilon, b]$  la dimostrazione è completa una volta che si sia dimostrato che  $g^{-\varepsilon} \approx g^\varepsilon$ . Per fare ciò applichiamo il teorema 2.5. alla varietà senza bordo  $g^{-1}(-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4)$  e alla funzione  $g$ . Si noti che la varietà  $g^{-1}[-9\varepsilon/8, 9\varepsilon/8]$  è completa e quindi dobbiamo solo mostrare che esiste  $\eta > 0$  tale che  $\|\nabla g\| \geq \eta \quad \forall x \in g^{-1}(-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4)$ .  
 Poichè  $g(B_i) = -3\varepsilon/2$ ,  $N_i \cap g^{-1}(-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4) = \emptyset$ . Quindi esiste  $\alpha > 0$  tale che  $T_i(N(B_i)(\alpha)) \cap g^{-1}(-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4) = \emptyset$ . Inoltre  $f(g^{-1}(-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4)) \subset [-5\varepsilon/4, -5\varepsilon/4]$  (segue dal fatto che  $g(x) \leq f(x)$ , da cui segue che  $g(x) \geq -5\varepsilon/4$  implica  $f(x) \geq -5\varepsilon/4$  e dal fatto che per  $f, g \geq \varepsilon$   $f=g$ ).  
 Poichè  $f$  non ha punti critici in  $g^{-1}[-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4]$  e poichè  $f$  è limitata su questo insieme, si ha  $\|\nabla f_x\| \geq \eta > 0$  in  $g^{-1}[-5\varepsilon/4, -5\varepsilon/4]$ .

D'altra parte:

$$g|_{Q - \bigcup_{i=1}^s U_i} = f|_{Q - \bigcup_{i=1}^s U_i} \quad \text{e quindi} \quad \|\nabla g_x\| \geq \eta > 0 \quad \text{per } x \in Q - \bigcup_{i=1}^s U_i$$

Dobbiamo allora solo mostrare che  $\|\nabla g\| |_{U_i \cap g^{-1}(-5\varepsilon/4, 5\varepsilon/4)}$  è inferiormente limitato da una costante positiva.

Per valutare  $\|\nabla g\|$  costruiamo una metrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$  per  $T(N(B_i))$  tale che  $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle^* = \langle v_1, v_2 \rangle$  dove  $v_i \in N(B_i)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la metrica in  $N(B_i)$  e  $\bar{v}_i$  denota il vettore tangente ad  $x \in N(B_i)$  corrispondente a  $v_i$ . Allora se  $x \in N(B_i)$ , sia  $\bar{w} = P_i(x) - (1-P_i)(x) \in T(N(B_i))_x$ . Si ha che  $g \cdot T(x) = \|Px\|^2 - \|(1-P)x\|^2 + (3/2)\varepsilon \lambda(\|Px\|^2/\varepsilon)$  e quindi

$$d(g \cdot T)_x [\bar{w}] = 2 [\langle Px, \bar{w} \rangle^* - \langle (1-P)x, \bar{w} \rangle^*] - 3\lambda'(\|Px\|^2/\varepsilon) \langle Px, \bar{w} \rangle^*$$

Abbiamo che  $\lambda'(t) \geq 0$  e quindi

$$\begin{aligned} d(g \cdot T)_x [\bar{w}] &= 2 [\|Px\|^2 + \|(1-P)x\|^2] - 3\lambda'(\|Px\|^2/\varepsilon) \langle Px, \bar{w} \rangle \\ &= 2 \|x\|^2 - 3\lambda'(\|Px\|^2/\varepsilon) \|Px\|^2 \\ &\geq 2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 2 \|x\|^2 &\leq d(g \cdot T)_x [\bar{w}] \\ &= dg_{Tx} \circ dT_x [\bar{w}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle g_{Tx}, dT_x [\bar{w}] \rangle \\
 &\leq \| \nabla g_{Tx} \| \| dT_x \| \| \bar{w} \| \\
 &\leq \| \nabla g_{Tx} \| \| dT_x \| \| x \|
 \end{aligned}$$

quindi

$$\| \nabla g_{Tx} \| \geq 2\|x\| / \|dT_x\| \geq 2\alpha / \|dT_x\| \quad (\|x\| \geq \alpha)$$

Mostriamo che  $\|dT_x\|$  é limitato.

Poiché  $N_i$  é compatto  $\|dT\|$  é limitato su  $B_i \subset N(B_i)$  e quindi in un intorno  $N(B_i)$  di  $B_i$ . Quindi, poiché  $\delta$  era arbitrario, assumiamo  $2\delta < \delta$ . Finalmente ne segue che  $(f|_Q)^b \approx (f|_Q)^e = g^\epsilon \approx g^{-\epsilon} \approx (f|_Q)^{-\epsilon} \cup$  s-handle bundle di tipo  $(B_i, f)$  e perciò  $f^b \approx f^{-\epsilon} \cup$  s-handle bundle. ■

Le conseguenze di tipo omologico sono contenute nel seguente teorema:

2.10. Corollario. Siano  $B_1, \dots, B_r$  le varietà critiche in  $f^{a,b}$  con indice  $k_i < \infty$ .

Allora, se ogni  $B_i$  ha un fibrato normale orientabile (\*), si ha

$$H_n(f^b, f^a) \approx \sum_{i=1}^t H_{n-k_i}(N_i)$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente  $f^b \approx f^a \cup$  s-handle bundle di tipo  $(N_i, f)$ .

Sia  $H_i = V_i(1) \oplus W_i(1)$  l'iesimo handle bundle e sia  $P_i: V_i \oplus W_i \rightarrow V_i \oplus W_i$  la proiezione su  $V_i$ . Sfruttando la proprietà d'excisione (I.2.14) si ha

$$H_n(f^b, f^a) \cong H_n(f^b - f^{a-\epsilon}, f^a - f^{a-\epsilon})$$

e, sfruttando ora il fatto che, per  $\epsilon$  piccolo, non vi sono punti critici in  $f^{a-\epsilon, a}$  (cioé  $f^{a-\epsilon}$  é retrato di deformazione di  $f^a$ ; vedi I.3.7)

$$\begin{aligned}
 H_n(f^b, f^a) &\cong H_n(f^{a,b}, (f=a)) \\
 &\cong \sum_{i=1}^s H_n(H_i, V_i(1) \oplus \partial W_i(1))
 \end{aligned}$$

---

(\*) Diciamo che una fibrazione  $V \xrightarrow{P} B$  di fibra tipica  $F$  é orientabile su di un anello  $K$  se per ogni cammino chiuso  $\omega$  in  $B$ , con  $\omega(0) = \omega(1) = b \in B$ , l'applicazione indotta  $\rho_\omega^*: H^*(F_b; K) \rightarrow H^*(F_b; K)$  é l'identità. In particolare se  $B$  é semplicemente connesso ogni fibrazione di  $B$  é orientabile.

La fibra di  $H$  é convessa ed esiste una retrazione equivariante che preserva le fibre di  $H$  su  $V(1) \oplus \partial W(1) \cup 0 \oplus W(1)$  data da:

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \rho(P(h), (1-P)(h)) = \rho(x, y) \\ &= \begin{cases} (2x/(2-|y|), 0) & \text{se } |x| \leq 1-|y|/2 \\ (x/|x|, (2|x|+|y|-2)y/|y|) & \text{se } |x| \geq 1-|y|/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} H_n(f^b, f^a) &= \sum_{i=1}^s H_n(H_i, V_i(1) \oplus \partial W_i(1)) \\ &\cong \sum_{i=1}^s H_n(V_i(1) \oplus \partial W_i(1) \cup 0 \oplus W(1), V_i(1) \oplus \partial W_i(1)) \\ &= \sum_{i=1}^s H_n(V_i(1) \oplus \partial W_i(1), V_i(1) \oplus \partial W_i(1)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^s H_n(0 \oplus W_i(1), V_i(1) \oplus \partial W_i(1)) \\ &= \sum_{i=1}^s H_n(W_i(1), \partial W_i(1)) \end{aligned}$$

che, grazie all'orientabilità e all'isomorfismo di Thom per  $i \leq t$  é isomorfo a

$$\cong \sum_{i=1}^t H_{n-k_i}(N_i) + \sum_{i=t+1}^s H_n(W_i(1), \partial W_i(1))$$

Si ha poi che, poiché  $\dim W = \infty$   $H_n(W(1), \partial W(1)) = 0$  (vedi [w2] Corollario 4.7) ■

**2.12. Diseguaglianze di Morse.** Siano  $a, b$  due valori regolari di  $f$ ,  $a < b$  ed indichiamo nuovamente con  $\{B_i\}_{i=1, \dots, t}$  le varietà critiche per  $f$  di indice finito  $k_i$ . Ricordando le definizioni I.2.8 otteniamo le seguenti relazioni, dette disequaglianze di Morse:

$$(i) \quad \chi(f^b, f^a) = \sum_{i=1}^t (-1)^{k_i} \chi(B_i)$$

$$(ii) \quad R_n(f^b, f^a) \leq \sum_{i=1}^t \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_{s-k_i}(B_i)$$

$$(iii) \quad S_n(f^b, f^a) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_s(f^b, f^a) \leq \sum_{i=1}^t \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_{s-k_i}(B_i)$$

che si ottengono dal corollario sopra, dall'additività di  $\chi$  e dalla subadditività di  $R_n$  e di  $\sum_{n \leq k} (-1)^{k-n} R_n$ .

2.13. Osservazione. Si noti che le varietà di indice non finito non contribuiscono alle disequaglianze di Morse.

CAPITOLO III: TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI CRITICI PER FUNZIONALI  $S^1$   
INVARIANTI E LORO PERTURBAZIONI

§ 0. Introduzione

In questo capitolo vengono dimostrati teoremi astratti di esistenza di punti critici per funzionali  $S^1$ -invarianti e discusso il problema della loro perturbazione utilizzando la teoria di Morse.

L'inconveniente maggiore che si incontra nell'utilizzare la teoria di Morse per dimostrare teoremi di questo tipo è il fatto che la sua applicabilità richiede un'ipotesi "a priori" di non degenerazione sui punti critici (sulle varietà critiche). Ciò può essere superato utilizzando ragionamenti per assurdo e sfruttando la densità delle funzioni di Morse. Si vedano ad esempio i lavori [Pr], [MP1], [MP2], [Ch], [A1], [A2], [A3], [AL], [L].

Presentiamo qui anche teoremi di esistenza di punti critici per funzionali su cui si assuma a priori l'ipotesi di non degenerazione; anche se quest'ultima ipotesi non è generalmente verificabile, riteniamo tuttavia che la già citata densità delle funzioni di Morse possa rendere interessanti questi risultati.

Infine osserviamo che solo una piccola parte dei teoremi qui contenuti vengono utilizzati nella applicazione presentata nell'ultimo capitolo. Applicazioni che sfruttano questi risultati saranno oggetto di un prossimo lavoro con A. Ambrosetti [AC].

§ 1. Esistenza di punti critici

Indichiamo con  $S^1$  il gruppo delle rotazioni nel piano e supponiamo che sia assegnata un'azione  $\psi: S^1 \times E \rightarrow E$  ove  $E$  è uno spazio di Hilbert, supponiamo cioè che  $E$  sia un  $S^1$ -spazio. Supponiamo inoltre che  $f$  sia un funzionale di classe  $C^2$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $S^1$ -invariante.

1.1. Osservazione. Sia  $\Omega^*$  un'orbita di minimo isolata per  $f$ ,  $c = f(\Omega^*)$  e sia  $U$  un'intorno di  $\Omega^*$  tale che  $Z \cap U = \Omega^*$ . Poniamo  $V = U \cap f^c$ ,  $U^- = V - \Omega^* = \emptyset$ . Si ha che

$$(1.1) \quad H_k(V, U^-) \cong H_k(\Omega^*, \emptyset) \cong H_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k=0,1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0,1 \end{cases}$$

Quindi le orbite isolate di minimo locale si comportano, indipendentemente dal fatto che siano o meno degeneri, come varietà critiche non degeneri di indice 0.

1.2. Teorema. Sia  $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ ,  $f$   $S^1$ -invariante e supponiamo che valga (P.S.) ed (R) e che  $f$  sia inferiormente limitata su  $E$ . Allora  $f$  ha almeno due orbite critiche. Inoltre se  $f$  ha solo varietà critiche non-degeneri,  $f$  ha infinite orbite critiche.

Dimostrazione. E' risaputo che  $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ , vale (P.S.) e  $\inf_E f = c^* > +\infty$  implica che esiste  $u_0 \in E$  tale che  $f(u_0) = c^*$  e  $u_0$  è un punto critico per  $f$ . Sia  $\Omega_{u_0}$  l'orbita di minimo corrispondente. Supponiamo che non vi siano altre orbite critiche. Allora, in particolare  $\Omega_{u_0}$  è isolata e tutte le varietà critiche sono non-degeneri (o meglio, è come lo fossero; si veda l'osservazione 1.1). Si applicano allora le disuguaglianze di Morse. Innanzi tutto abbiamo che, se  $a > c^* > b$ ,  $f^a \approx E$  (si veda il teo. II.2.5),  $f^b = \emptyset$  e quindi:

$$H_n(f^a, f^b) \cong H_n(E, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$\sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_s(f^a, f^b) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_s(E) = (-1)^n$$

Indichiamo ora con  $B_i, i=1, \dots, t$  le varietà critiche per  $f$  di indice  $k_i$ .

Dalle ipotesi si ha che l'unica varietà critica è  $B_0$ , di indice 0. Quindi:

$$\sum_{i=1}^t \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_{s-k_i}(B_i) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_s(\Omega_{u_0}) = (-1)^n + (-1)^{n-1} = 0$$

Dalla (iii) delle disuguaglianze di Morse II.2.12 otteniamo:

$$0 \leq (-1)^{n-1}$$

assurdo.

Supponiamo ora che tutte le varietà critiche di  $f$  siano non degeneri. Se, per assurdo,  $f$  ha solo un numero finito di orbite critiche  $\Omega_i$ ,  $i=1, \dots, t$ , queste sono isolate e non degeneri (come varietà critiche) e si possono applicare le diseguaglianze di Morse. A tale scopo indichiamo con  $C_k$  il numero di orbite critiche di indice  $k$ . Notiamo anche che in queste ipotesi esiste un  $b^*$  tale che  $Z(f) \subset f^{b^*}$ . Dalla (iii) delle diseguaglianze di Morse otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_s(f^{b^*}, f^b) &\leq \sum_{i=1}^t \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_{s-k_i}(\Omega_i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_k R_{s-k}(S^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_k (\delta_{s-k,0} + \delta_{s-k,1}) \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} (C_s + C_{s-1}) + (-1)^n C_0 \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_s + \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_{s-1} + (-1)^n C_0 \\ &= C_n \end{aligned}$$

Da cui deduciamo,  $\forall n$ ,

$$C_n \geq (-1)^n$$

in contraddizione con l'ipotesi di esistenza di solo un numero finito di orbite critiche. ■

1.3. Osservazione. Sarà più conveniente, nel caso di  $S^1$  invarianza, riscrivere le diseguaglianze di Morse nel modo seguente:

Sia  $C_k(f^a, f^b)$  = numero di orbite critiche non degeneri di indice  $k$  in  $f^{a,b}$ . Dalla (iii) delle diseguaglianze di Morse abbiamo, ragionando come nella dimostrazione del teorema 1.2:

$$(1.2) \quad \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} R_s(f^a, f^b) \leq C_n(f^b, f^a)$$

Va però osservato che la (1.2) è valida solo se in  $f^{a,b}$  vi sono solo orbite critiche non degeneri o minimi isolati. Nel caso in cui vi siano varietà critiche più complesse che semplicemente orbite di  $S^1$  o punti critici che siano punti fissi per l'azione del gruppo, le (1.2) non sono utilizzabili.

1.4. Teorema. Sia  $f \in C^2(E, \mathbb{R})$  un funzionale che soddisfa (P.S.) e (R),  $S^1$ -invariante e tale che vale

(A) Esiste  $a \in \mathbb{R}$  e una palla  $m$ -dimensionale  $B_r^m$  di raggio  $r$  tale che  $\partial B_r^m$  è un retratto di deformazione di  $f^a$ .

Allora  $f$  ha almeno un punto critico in  $E$ . Inoltre, se  $\exists u^* \in Z(f)$ , punto critico non degenero con  $\text{ind}(u^*) = i^* > m$ , allora  $f$  ha almeno un altro punto critico  $\hat{u} \neq u^*$ .

Dimostrazione. Supponiamo che  $Z(f) = \emptyset$ . Allora  $f$  è un funzionale di Morse e  $\forall b \ f^b$  è un retratto di deformazione di  $E$ . Dalla (A) segue:

$$H_k(f^b, f^a) \cong H_k(E, f^a) \cong H_k(E, \partial B_r^m) \cong H_k(B_r^m, \partial B_r^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k=m \\ 0 & \text{se } k \neq m \end{cases}$$

Dalla (1.2) per  $n=m$  otteniamo

$$\sum_{s=0}^m (-1)^{m-s} R_s(f^b, f^a) \leq C_m(f^b, f^a)$$

$$1 \leq C_m(f^b, f^a)$$

Contraddizione.

Nel caso in cui  $\exists u^* \in Z(f)$ , non-degenero con  $\text{ind}(u^*) = i^* > m$ , supponiamo che questo sia l'unico punto critico per  $f$ . Dalla (iii) delle disuguaglianze di Morse otteniamo, per  $n=m$ :

$$\sum_{s=0}^m (-1)^{m-s} R_s(f^b, f^a) \leq \sum_{s=0}^m (-1)^{m-s} R_{s-i^*}(u^*)$$

Poiché  $i^* > m$ ,  $R_{s-i^*}(u^*) = 0 \ \forall s=0, \dots, m$ , e quindi otteniamo  $1 \leq 0$ , assurdo. ■

1.5. Osservazione. Si noti che il teorema 1.4, dimostrato nel caso di  $f$   $S^1$  invariante, vale nella stessa formulazione anche per funzionali non  $S^1$ -invarianti.

1.6. Teorema. Sia  $f \in C^2(E, \mathbb{R})$  un funzionale che soddisfi (P.S.), (R), (A) e tale che  $Z(f)$  sia formato solo da orbite critiche non degeneri e da  $u^*$ , punto critico non degenero di indice  $i^* > m$ . Allora  $f$  ha almeno  $(i^* - m)/2$  orbite critiche.

Dimostrazione. La dimostrazione é del tutto analoga alla dimostrazione del teorema 1.4, notando che si può applicare la (1.2) a tutti i valori di  $n$  compresi fra  $m \leq n < i^*$ .

Si ottiene

$$C_n(f^b, f^a) \geq (-1)^{n-m}$$

da cui la tesi. ■

## § 2. Teoremi di perturbazione per funzionali $S^1$ -invarianti

Consideriamo due funzionali  $f, g \in C^2(E, \mathbb{R})$  che soddisfino (P.S.). Supporremo inoltre che  $f$  sia  $S^1$ -invariante e che soddisfi (R), mentre non assumeremo alcuna invarianza per  $g$ . Vogliamo enunciare teoremi di esistenza di punti critici per  $g$ , nell'ipotesi che  $g$  sia vicina ad  $f$ . Lo strumento principale é il seguente lemma algebrico, dovuto a Marino e Prodi [MP2, § 4].

2.1. Lemma. Consideriamo i seguenti spazi topologici:  $A, X, B, A', Y, B'$  tali che

$$A \subset X \subset B \subset A' \subset Y \subset B'.$$

Supponiamo che sia  $H_q(B, A) = 0$ ,  $H_q(B', A') = 0 \quad \forall q$ . Allora l'omomorfismo canonico

$$h: H_q(A', A) \longrightarrow H_q(Y, X)$$

é iniettivo:

Dimostrazione. Consideriamo i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{q+1}(B', A') & \longrightarrow & H_q(A', A) & \xrightarrow{i} & H_q(B', A) & \longrightarrow & H_q(B', A') \\
 & & \searrow \alpha & & \swarrow \beta & & \\
 & & & & H_q(Y, A) & & \\
 \\ 
 H_q(B, A) & \longrightarrow & H_q(Y, A) & \xrightarrow{i_1} & H_q(Y, B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B, A) \\
 & & \searrow \alpha_1 & & \swarrow \beta_1 & & \\
 & & & & H_q(Y, X) & & 
 \end{array}$$

ove le righe sono le successioni esatte d'omologia (vedi I.2.16) delle terne  $(B', A', A)$  e  $(Y, B, A)$  e gli omomorfismi  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  sono quelli canonici. Poiché i gruppi  $H_q(B, A)$  e  $H_q(B', A')$  sono nulli  $\forall q$ , gli omomorfismi  $i$  e  $i_1$  sono isomorfismi; poichè  $i = \alpha \cdot \beta$  e  $i_1 = \alpha_1 \cdot \beta_1$ , segue che  $\alpha$  e  $\alpha_1$  sono omomorfismi iniettivi. Poichè  $h = \alpha_1 \cdot \alpha$  ne segue che  $h$  è iniettivo. ■

2.2. Lemma. (Perturbazione di un minimo isolato). Sia  $c = \inf_E f > -\infty$ ,  $\gamma = \inf_E g > -\infty$ .

Si assuma:

- (i)  $Z_c(f) = \{u \in Z(f) : f(u) = c\} = \Omega$ ,  $\Omega$  orbita critica.
- (ii)  $Z_s(f) = \emptyset \quad \forall s \in ]c, c + \delta]$ .
- (iii)  $f^{c+(1/6)\delta} \subset g^{c+(1/2)\delta} \subset f^{c+\delta}$ .

Allora  $g$  ha almeno due punti critici  $u_1 \neq u_2$ , con  $g(u_i) \leq c + (1/2)\delta$ ,  $i=1,2$ .

Dimostrazione. Poiché vale (P.S.) e  $g$  è inferiormente limitata,  $\exists u \in Z_\gamma(g)$ .

Dalla (iii) segue che  $\gamma \leq c + (1/2)\delta$  ( $g^{c+(1/2)\delta}$  contiene  $f^{c+(1/6)\delta} \neq \emptyset$ ).

Si supponga, per assurdo, che  $Z(g) \cap g^{-1}] - \infty, c + (1/2)\delta] = \{u_1\}$ . Si ponga

$W = g^{c+(1/2)\delta}$   $X = f^{c+(1/6)\delta}$   $Y = f^{c+\delta}$ . Abbiamo che, poichè

$Z(g) \cap g^{-1}] - \infty, c + (1/2)\delta] = \{u_1\}$  e poichè  $u_1$  è minimo:

$$H_k(W) = H_k(\{u_1\})$$

e quindi, in particolare,  $H_1(W) = 0$ .

Dalla (iii) si deduce la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 H_1(X) & \xrightarrow{\Phi_1} & H_1(Y) \\
 \Phi_2 \downarrow & \swarrow & \Phi_3 \\
 H_1(W) & & 
 \end{array}$$

dove i  $\Phi_i$  sono gli omomorfismi canonici indotti dall'inclusione  $X \subset W \subset Y$ . D'altra parte da (ii) segue che  $\Phi_1$  é un isomorfismo. Quindi  $H_1(W) = 0 \Rightarrow H_1(Y) = 0$ , in contraddizione con il fatto che  $Z_c(f) = \Omega$ ,  $\Omega$  orbita critica di minimo e (ii)  $\Rightarrow H_1(Y) \cong H_1(S^1) \neq 0$ . ■

Il lemma seguente é dovuto essenzialmente a Marino e Prodi [MP2]:

2.3. Lemma. Si supponga che  $c, \delta$  siano tali che

- (i)  $f^{c-\delta} \subset_g^{c-(1/2)\delta} \subset_f^{c-(1/6)\delta} \subset_f^{c+(1/6)\delta} \subset_g^{c+(1/2)\delta} \subset_f^{c+\delta}$   
(ii)  $Z_s(f) = \emptyset \quad \forall s \in [c-\delta, c+(1/2)\delta]$

Allora  $\forall q \in \mathbb{Z}$  tale che  $R_q(f^{c+\delta}, f^{c-\delta}) \neq 0$  risulta  $R_q(g^{c+(1/2)\delta}, g^{c-(1/2)\delta}) \neq 0$ .

In particolare  $g$  ha almeno un livello critico in  $[c-(1/2)\delta, c+(1/2)\delta]$ .

Inoltre, se  $g$  é un funzionale di Morse, allora  $g$  ha almeno un punto critico di indice  $q$  in  $g^{-1} [c-(1/2)\delta, c+(1/2)\delta]$ .

Dimostrazione. Dalla (ii) segue che  $H_q(f^{c+(1/6)\delta}, f^{c+\delta}) = 0$  e che

$H_q(f^{c-\delta}, f^{c-(1/6)\delta}) = 0$ . Quindi, per il lemma 2.1, si ha che é iniettivo l'omomorfismo canonico

$$h : H_q(f^{c+(1/6)\delta}, f^{c-\delta}) \longrightarrow H_q(g^{c+(1/2)\delta}, g^{c-(1/2)\delta})$$

e quindi  $H_q(g^{c+(1/2)\delta}, g^{c-(1/2)\delta}) \neq 0$ , da cui segue subito il lemma. ■

CAPITOLO IV: APPLICAZIONI

§ 0. Introduzione

In questo capitolo viene discussa una applicazione della teoria esposta nei precedenti capitoli alla ricerca di soluzioni  $2\pi$ -periodiche del sistema di equazioni differenziali

$$-\ddot{x} = \nabla V(x) + h(t)$$

con  $h$  piccolo.

Questo problema é stato recentemente affrontato da parecchi autori; per un'analisi dei risultati ottenuti, nonché per un'esauriente bibliografia, rimandiamo a [Ra] e [B].

Osserviamo infine che i risultati qui ottenuti sono già noti nel caso di  $h=0$  (si veda [Be]); riteniamo comunque interessante il metodo da noi utilizzato.

§ 1. Esistenza di soluzioni

Sia  $V_\lambda: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  e consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$(1.1) \quad -\ddot{x} = \nabla_x V_\lambda(t, x)$$

ove su  $V$  faremo le seguenti ipotesi (si veda [Be] per una situazione analoga)

$$(V1) \quad V_\lambda \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \quad V_\lambda(t, 0) = 0, \quad (V_\lambda)_{xx}(t, 0) = KI_N \quad \text{con } K > 1, \quad K \notin \mathbb{Z}$$

$$(V2) \quad V_\lambda(t, x) = (1/2)k|x|^2 + U(x) + \lambda(h(t), x) \quad \text{ove } h(t) \in H^1(S^1; \mathbb{R}^N),$$

$$|U'(x)| \leq \Phi(|x|) \quad \text{ove } \Phi(s)/s \rightarrow 0 \quad \text{per } s \rightarrow +\infty, \quad U'(0) = 0$$

$$(V3) \quad -a_0 \leq U(x) \leq a_0$$

1.1. Osservazione. Si noti che (V2) implica:

$$(1.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a > 0 \quad \text{tale che } \Phi(t) \leq \varepsilon t + a$$

Introduciamo poi  $E = H^1(S^1; \mathbb{R}^N)$ , spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v)_1 = \int_0^{2\pi} (u, v) + \int_0^{2\pi} (u, v) \quad \text{e poniamo}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f_\lambda: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto f_\lambda(u) = (1/2) \int |\dot{u}|^2 - \int V_\lambda(t, u) \end{aligned}$$

I punti critici di  $f_\lambda$  sono soluzioni  $2\pi$ -periodiche di (1.1), che é noto essere di classe  $C^2$ . Si noti che il funzionale (1.3) non é inferiormente limitato. Nel caso in cui  $\lambda=0$ ,  $f_0 \equiv f$  é  $S^1$ -invariante. Ne segue che una soluzione  $u(t)$  di (1.1) non é mai isolata; infatti anche  $u(t+\vartheta)$  é soluzione dello stesso problema qualunque sia  $\vartheta \in [0, 2\pi[$ . Che valga la proprietá (R) é assicurato dalla regolarità delle soluzioni.

1.2. Lemma. Il funzionale (1.3) é tale che (per  $\lambda$  fissato):

- (a) l'insieme  $Z$  dei punti critici é limitato
- (b)  $\exists c$  tale che  $\forall u \in Z \quad |f_\lambda(u)| \leq c$
- (c) vale (P.S.).

Dimostrazione. Poniamo  $W = \{w \in E : \int w = 0\}$ ,  $E = E_0 \oplus W$ . Se  $u(t) \in E$

$$(1.4) \quad u(t) = w(t) + \xi$$

ove  $\xi = \int_0^{2\pi} u(t) \in \mathbb{R}^N \cong E_0$ ,  $w(t) = u(t) - \xi \in W$

passo 1: Se  $(u_k) \subset E$  e  $f'_\lambda(u_k) \rightarrow 0$  allora  $(u_k)$  é limitata.

Sia  $(u_k) \subset E$  tale che  $f'_\lambda(u_k) \rightarrow 0$ . Ne segue che, per  $n$  grande

$$(1.5) \quad (f'_\lambda(u_n), w_n)_1 \leq \|w_n\|_1$$

$$(1.6) \quad (f'_\lambda(u_n), \xi_n)_1 \leq \|\xi_n\|_1$$

Da (1.5) segue che:

$$\begin{aligned} \int |\dot{w}_n|^2 - \int (\nabla_x V_\lambda(t, u_n), w_n) &\leq \|w_n\|_1 \\ \int |\dot{w}_n|^2 - k \int |w_n|^2 - \lambda \int (h, w_n) - \int (U'(u_n), w_n) &\leq \|w_n\|_1 \\ (1-k) \int |\dot{w}_n|^2 + k \int |\dot{w}_n|^2 - k \int |w_n|^2 &\leq \int (\lambda h + U'(u_n), w_n) + \|w_n\|_1 \end{aligned}$$

Ricordando che per funzioni in  $E$  a media nulla:

$$(1.7) \quad \int |\dot{w}_n|^2 \geq \int |w_n|^2$$

abbiamo:

$$(1-k) \int |\dot{w}_n|^2 \leq \|w_n\|_1 + \int (\lambda h + |U'(u_n)|) |w_n|$$

$$(1-k) \int |\dot{w}_n|^2 \leq \|w_n\|_1 + \int (\lambda h + \varepsilon |u_n| + a) |w_n|$$

$$(1-k) \int |\dot{w}_n|^2 \leq \|w_n\|_1 + \varepsilon \|u_n\|_{L^2}^2 \|w_n\|_{L^2}^2 + (\tilde{a} + \lambda \|h\|_{L^2}) \|w_n\|_{L^2}^2$$

da cui

$$(1.8) \quad (1-k) \|w_n\|_1^2 / 2 \leq (1 + \tilde{a} + \lambda \|h\|_{L^2}) \|w_n\|_1 + (\varepsilon/2) (\|u_n\|_1^2 + \|w_n\|_1^2)$$

Abbiamo poi che

$$(f'_\lambda(u_n), \xi_{n,1}) = -\int (V_\lambda(t, u_n), \xi_n)$$

$$(f'_\lambda(u_n), \xi_{n,1}) = -k \int |\xi_n|^2 - \lambda \int (h, \xi_n) - \int (U'(u_n), \xi_n)$$

cioè

$$-k \|\xi_{n,1}\|_1^2 = (f'_\lambda(u_n), \xi_{n,1}) + \int (\lambda h + U'(u_n), \xi_n)$$

da cui

$$k \|\xi_{n,1}\|_1^2 \leq |(f'_\lambda(u_n), \xi_{n,1})| + \int (\lambda h + U'(u_n), \xi_n)$$

$$k \|\xi_{n,1}\|_1^2 \leq \|\xi_{n,1}\|_1 + \int (\lambda |h| + \varepsilon |u_n| + a) |\xi_n|$$

$$(1.9) \quad k \|\xi_{n,1}\|_1^2 \leq (1 + \tilde{a} + \|h\|_{L^2}) \|\xi_{n,1}\|_1 + (\varepsilon/2) (\|u_n\|_1^2 + \|\xi_{n,1}\|_1^2)$$

Dalla (1.8) e (1.9) segue che

$$\|u_n\|_1^2 \leq a_1 \|u_n\|_1 + \varepsilon a_2 \|u_n\|_1^2$$

dove  $a_1, a_2 > 0$  e  $a_2$  è indipendente da  $\varepsilon$  (non così  $a_1$ ). Prendendo  $\varepsilon = a_2/2$ , si ottiene:

$$(1.10) \quad \|u_n\|_1^2 \leq 2a_1 \|u_n\|_1$$

e quindi la limitatezza di  $(u_n)$ .

Passo 2: dimostrazione del punto (a).

Supponiamo ora che  $Z$  non sia limitato; ciò implica l'esistenza di  $(u_n)$  tale che

$f'(u_n) = 0$ ,  $\|u_n\|_1 \rightarrow \infty$ , in contraddizione con il passo 1.

Passo 3: dimostrazione del punto (b).

Supponiamo che  $E(u_n) \subset Z$  tale che  $|f'_\lambda(u_n)| \geq n$ .

$(u_n) \subset Z \Rightarrow \|u_n\|_1 \leq M$  per il punto (a). Quindi

$$\begin{aligned} n \leq |f_\lambda(u_n)| &= |(1/2) \int |\dot{u}_n|^2 - V_\lambda(u_n)| \\ &\leq (1/2) \int |\dot{u}_n|^2 + (1/2)k \int |u_n|^2 + \lambda \int |u_n| |h| + 2\pi a_1 \\ &\leq (M/2) + (Mk/2) + \lambda \|h\|_L^2 M + 2\pi a_1 \end{aligned}$$

assurdo.

Passo 4: dimostrazione del punto (c).

Sia  $(u_n) \subset E$  tale che  $f'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ ,  $|f_\lambda(u_n)| \leq M$ . Per il punto (a),  $(u_n)$  é limitata in  $H^1(S^1)$ . Quindi esiste una sottosuccessione  $u_{n_m} \rightarrow z$  debolmente convergente in  $H^1(S^1)$ . Poniamo  $u_{n_m} = w_m + \xi_m$ .

Poiché  $\xi_m \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi_m \rightarrow \bar{z} = \int z$  fortemente.

Mostriamo che anche  $w_m \rightarrow w = z - \bar{z}$  fortemente.

L'operatore

$$\begin{aligned} H^1(S^1) &\rightarrow H^{-1}(S^1) \\ u &\mapsto V'_\lambda(u) \end{aligned}$$

é compatto (segue dalla limitatezza di  $V'_\lambda(x)$ ). Quindi la successione

$$m \mapsto (V'_\lambda(u_{n_m}), u_{n_m} - z)$$

converge a zero.

Ne segue che,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tale che,  $\forall m \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int (\dot{u}_{n_m}, \dot{u}_{n_m} - \dot{z}) dt \right| &= \left| \int (\ddot{u}_{n_m} + V'_\lambda(u_{n_m}) - V'_\lambda(u_{n_m}), u_{n_m} - z) \right| \\ &\leq \left| \int (V'_\lambda(u_{n_m}), u_{n_m} - z) \right| + \left| \int (f'_\lambda(u_{n_m}), u_{n_m} - z) \right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \|u_{n_m} - z\| \\ &\leq \varepsilon (1 + a_3) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|w_m - w\| &\leq a_4 \int |\dot{u}_{n_m} - \dot{z}|^2 dt \\ &= a_4 \int (\dot{u}_{n_m}, \dot{u}_{n_m} - \dot{z}) dt - a_4 \int (\dot{z}, \dot{u}_{n_m} - \dot{z}) dt \\ &\leq \varepsilon a_4 (1 + a_3) - a_5 \int (\dot{z}, \dot{u}_{n_m} - \dot{z}) dt \end{aligned}$$

e, dall'arbitrarietà di  $\epsilon > 0$  e dal fatto che  $u \xrightarrow[n]{m} z$  debolmente, segue la conclusione. ■

1.3. Lemma.  $f_\lambda$  soddisfa, per  $\lambda$  fissato,

(A)  $\exists a \in \mathbb{R}$  e una palla  $N$ -dimensionale  $B_R^N$  di raggio  $R$  tale che  $B_R^N$  è un retratto di deformazione di  $f^a$ .

Dimostrazione. Dal lemma 1.2 segue che  $\exists a^* \in \mathbb{R}$  tale che  $Z(f_\lambda) \cap f^{a^*} = \emptyset$ . Poniamo:

$$\gamma_\lambda(u) = (1/2) \int |\dot{u}|^2 - (1/2)k \int |u|^2 - \lambda \int hu$$

Dalla (V3) segue che,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $f_\lambda^a \subset \gamma_\lambda^{a'} \subset f_\lambda^{a''}$ , ove  $a' = a + 2\pi a_1$  e  $a'' = a' + 2\pi a_1$ .

Infatti  $u \in f_\lambda^a$  implica:

$$\begin{aligned} a &\geq (1/2) \int |\dot{u}|^2 - \int V_\lambda(u) \\ &= (1/2) \int |\dot{u}|^2 - (1/2)k \int |u|^2 - \lambda \int hu - \int U(u) \\ &\geq (1/2) \int |\dot{u}|^2 - (1/2)k \int |u|^2 - \lambda \int hu - 2\pi a_1 \\ &= \gamma(u) - 2\pi a_1 \end{aligned}$$

da cui segue che  $\gamma_\lambda(u) \leq a + 2\pi a_1 \Rightarrow u \in \gamma_\lambda^{a'}$

Prendendo  $a'' < a^*$  abbiamo che  $f^{a''} \cap Z(f) = \emptyset$  e quindi esiste una deformazione  $\eta : f^{a''} \rightarrow f^a$ .

Per  $t \in [0, 1]$  sia

$$\psi(t, u) = tw + (1 + \alpha - \alpha t)\xi \quad \text{ove} \quad \alpha = \sigma \|w\|_L^2 / \|\xi\|_L^2, \quad \sigma = \sqrt{1-k}/\sqrt{k}.$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \gamma(\psi(t, u)) &= (t^2/2) \int |\dot{w}|^2 - (1/2)kt^2 \int |w|^2 - (1/2)k(1+\alpha-\alpha t)^2 \int |\xi|^2 - \lambda t \int hw + \\ &\quad - \lambda(1+\alpha-\alpha t) \int h\xi \\ &= (t^2/2) \left[ \| \dot{w} \|_L^2 - k \| w \|_L^2 - k \alpha^2 \| \xi \|_L^2 \right] + \\ &\quad - t \left[ \lambda \int hw + \lambda \alpha \int h\xi - \alpha(1+\alpha)k \int |\xi|^2 \right] + \\ &\quad - (1/2)(1+\alpha)^2 k \int |\xi|^2 - \lambda(1+\alpha) \int h\xi \end{aligned}$$

Come funzione di  $t$   $\gamma(\psi(t, u))$  è una parabola del tipo  $y = (a/2)t^2 - bt - c$ .

dove:

$$\begin{aligned} a &= \|\dot{w}\|_L^2 - k\|w\|_L^2 - (1-k)\|w\|_L^2 \\ &= \|\dot{w}\|_L^2 - \|w\|_L^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

e quindi la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. Avremo quindi che  $\gamma(\psi(t,u)) \leq \gamma(\psi(1,u)) \quad \forall t \in [0,1]$  se e solo se  $(b/a) \leq (1/2)$ , cioè se

$b - (1/2)a \leq 0$ . Valutiamo quindi  $b - (1/2)a$ :

$$\begin{aligned} b - (1/2)a &= \lambda \int hw + \lambda \alpha \int h\xi - \alpha(1+\alpha)k\|\xi\|_L^2 - (1/2)\|\dot{w}\|_L^2 + (1/2)\|w\|_L^2 \\ &\leq \lambda \|h\|_L^2 \|w\|_L^2 + \lambda \alpha \|h\|_L^2 \|\xi\|_L^2 - \alpha(1+\alpha)k\|\xi\|_L^2 \\ &= \lambda \|h\|_L^2 \|w\|_L^2 + \lambda \sigma \|h\|_L^2 \|w\|_L^2 - \sigma (\|w\|_L^2 / \|\xi\|_L^2) (1 + \sigma (\|w\|_L^2 / \|\xi\|_L^2)) k \|\xi\|_L^2 \\ &= \lambda \|h\|_L^2 \|w\|_L^2 + \lambda \sigma \|h\|_L^2 \|w\|_L^2 - \sigma \|w\|_L^2 (\|\xi\|_L^2 + \sigma \|w\|_L^2) k \\ &= \|w\|_L^2 [\lambda(1+\sigma) \|h\|_L^2 - k\sigma \|\xi\|_L^2 - \sigma^2 k \|w\|_L^2] \end{aligned}$$

Avremo che il termine fra parentesi quadra è negativo se  $\gamma_\lambda \leq a$  implica che  $\|\xi\|_L^2$  è grande.

A questo proposito si noti che  $\gamma_\lambda(u) \leq a$  implica

$$(1/2) \int |\dot{w}|^2 - (1/2)k \int |w|^2 - \lambda \int hw - (1/2)k \int |\xi|^2 - \lambda \int h\xi \leq a$$

da cui segue che

$$(1/2) \int |\xi|^2 + \lambda \int h\xi \geq -a + (1/2) \int |\dot{w}|^2 - (1/2)k \int |w|^2 - \lambda \int hw$$

$$(1/2) \|\xi\|_L^2 + \lambda \|h\|_L^2 \|\xi\|_L^2 \geq -a + (1/2)(1-k)\|w\|_L^2 - \lambda \|h\|_L^2 \|w\|_L^2$$

Il termine  $(1/2)(1-k)\|w\|_L^2 - \lambda \|h\|_L^2 \|w\|_L^2$  è inferiormente limitato da una costante, diciamo  $M$ , su  $E$ , e quindi:

$$(1/2) \|\xi\|_L^2 + \lambda \|h\|_L^2 \|\xi\|_L^2 \geq -a + M.$$

Scegliendo  $a$  negativo sufficientemente grande abbiamo allora che  $u \in \gamma_\lambda^a$  implica che  $\|\xi\|_L = \int |u|$  è più grande di una prefissata quantità e ne segue perciò che prendendo  $a$  grande negativo, diciamo  $a \leq \bar{a}$ , vale

$$\gamma_\lambda(\psi(t,u)) \leq \gamma_\lambda(\psi(1,u)) \quad \forall t \in [0,1]$$

e quindi se  $u \in \gamma_\lambda^{a'}$   $\psi(s,u) \in \gamma_\lambda^{a'}$   $\forall s \in [0,1]$  purché  $a' \leq \bar{a}$ . Prendendo allora  $a'' < a^*$  in modo che  $a' = a'' - 2\pi a_1 \leq \bar{a}$ , abbiamo una deformazione di  $f^{a''}$  in  $E_0 \cap f_\lambda^a$  così costruita: si deforma  $f_\lambda^{a''}$  in  $f_\lambda^a$  mediante  $\eta$  e poi  $f_\lambda^a$  in  $E_0 \cap f_\lambda^a$  mediante  $\varphi$ , dove  $\varphi(t,u) = \psi(1-t,u)$ . Si noti che  $\varphi$  lascia fisso  $E_0 \cap f_\lambda^a$ . Quindi  $E_0 \cap f_\lambda^a$  é un retratto di deformazione di  $f_\lambda^{a''}$ . Per completare la dimostrazione é sufficiente mostrare che, per  $\lambda$  grande negativo, vale

- (i)  $\exists R > 0$  tale che  $\{\xi \in E_0 : f_\lambda(\xi) = a\} \subset B_R$
- (ii)  $\{\xi \in E_0 : f_\lambda(\xi) = a\}$  é star-shaped per  $\lambda$  grande negativo.

Dalla (V3) segue che  $\exists \alpha, \beta > 0$  tali che

$$-\gamma|\xi| - \alpha|\xi|^2 - \beta \leq f_\lambda(\xi) = -2\pi V_\lambda(\xi) \leq -\alpha|\xi|^2 + \gamma|\xi| + \beta$$

da cui segue subito la (i). Dalla (V2) segue poi che:

$$\begin{aligned} (V'_\lambda(\xi), \xi) &= k|\xi|^2 + \lambda(h(t), \xi) + (U'(\xi), \xi) \\ &\geq k|\xi|^2 - \lambda \|h\|_\infty |\xi| - \Phi(|\xi|) |\xi| \end{aligned}$$

Poiché per  $\lambda$  grandi negativi  $f_\lambda(\xi) = a$  implica  $|\xi|$  grande, segue che

$(V'_\lambda(\xi), \xi) > 0$  per  $\lambda$  grande negativo e quindi segue la (ii). ■

1.4. Lemma.  $u=0$  é un punto critico per  $f_0$  non degenera e di indice  $\text{ind}(0) = N + 2NK_1 = i_0$ , dove  $K_1 = \text{parte intera di } \sqrt{K}$ .

Dimostrazione. Che  $u=0$  sia punto critico per la  $f_0$  segue dalla (V2). Abbiamo poi che

$$d^2 f(0)[v, v] = \int (\dot{v}, \dot{v}) - \int (V''(0)v, v)$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier

$$v(t) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} v_h e^{iht} \quad v_h \in \mathbb{C}^N, \quad v_h^* = v_{-h}$$

segue dalla (V1) che

$$d^2 f(0)[v, v] = \sum_{h \in \mathbb{Z}} (h^2 - K) |v_h|^2$$

da cui segue il lemma. ■

1.5. Teorema. Supponiamo che  $V$  soddisfi le ipotesi (V1), (V2) e (V3) con  $\lambda=0$ .

Allora (1.1) ha almeno una soluzione  $2\pi$ -periodica non banale.

Se, inoltre,  $V$  é tale che il corrispondente funzionale  $f$  abbia solo orbite critiche non degeneri, allora (1.1) ha almeno  $NK_1$  soluzioni  $2\pi$ -periodiche non banali.

Dimostrazione. Applichiamo, per dimostrare la prima parte del teorema, il teorema III.1.4. Le ipotesi di quest'ultimo teorema sono soddisfatte e esiste  $0 \in Z(f)$ , punto critico non degenero con  $\text{ind}(0) = N + 2NK_1 > N$ . Quindi  $f$  ha almeno un'altro punto critico  $\hat{u} \neq 0$ .

Per quanto riguarda la seconda parte, basta applicare il teorema III.1.6. Si ottiene l'esistenza di  $(N+2NK_1-N)/2 = NK_1$  orbite critiche diverse da 0. ■

1.6. Teorema. Supponiamo valgano le ipotesi (V1), (V2) e (V3). Allora (1.1) ha almeno una soluzione  $2\pi$ -periodica.

Inoltre  $\exists \bar{\epsilon} > 0$  tale che  $\forall \lambda \in ]0, \bar{\epsilon}]$  (1.1) ha almeno due soluzioni  $2\pi$ -periodiche.

Dimostrazione. La prima affermazione segue dall'osservazione III.1.5.

La seconda segue sempre dall'osservazione III.1.5 (e quindi dal teorema III.1.4) osservando che:

$$\begin{aligned} |f'_0(u)[v] - f'_\lambda(u)[v]| &= \left| \int (\dot{u}, \dot{v}) - k \int (u, v) - \int (U'(u), v) - \int (\dot{u}, \dot{v}) + \right. \\ &\quad \left. + k \int (u, v) + \int (U'(u), v) + \lambda \int (h, v) \right| \\ &\leq \lambda \|h\|_L 2 \|v\|_1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\|f'_0(u) - f'_\lambda(u)\| \leq \lambda \|h\|_L 2 \quad \forall u \in E \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$\text{Inoltre} \quad f''_0(u) = f''_\lambda(u) \quad \forall u \in E \quad \forall \lambda \geq 0$$

Sia  $B_\mu = \{u \in E : \|u\|_1 \leq \mu\}$ . Usando il lemma 1.4 e il teorema di inversione locale, segue che  $\exists \bar{\epsilon}, \mu > 0$  tali che  $\forall \lambda \leq \bar{\epsilon} \quad \exists \hat{u}_\lambda \in Z(f_\lambda) \cap B_\mu$ , che é non degenero di indice  $\text{ind}(\hat{u}_\lambda) = i_0 = N + 2NK_1$ .

Possiamo perciò di nuovo applicare il teorema III.1.4 ed ottenere un altro punto critico  $u_\lambda \neq \hat{u}_\lambda$ . ■

BIBLIOGRAFIA

- [A1] A. Ambrosetti, Differential equations with multiple solutions and nonlinear functional analysis, in Proc. Equadiff. 82, Springer Verlag, pp.10-37.
- [A2] A. Ambrosetti, Elliptic equations with jumping nonlinearities, J. Math. Phys. Sci., to appear.
- [A3] A. Ambrosetti, Teoria di Morse e problemi variazionali, Preprint Univ. di Venezia, Facoltà di Economia e Commercio, '84.
- [AC] A. Ambrosetti & V. Coti Zelati, Forced oscillations of hamiltonian systems and perturbation, in preparation.
- [AL] A. Ambrosetti & D. Lupo, On a class of nonlinear Dirichlet problems with multiple solutions, J. Nonlinear Anal. T.M.A., to appear.
- [B1] R. Bott, Nondegenerate critical manifolds, Annals of Math., 60 (1954), pp.248-261.
- [B2] R. Bott, Lectures on Morse theory, old and new, Bull. Am. Math. Soc., 7 (1982), pp. 331-358.
- [B3] R. Bott, Marston Morse and his mathematical works, Bull. Am. Math Soc., 3 (1980), pp. 907-950.
- [Be] V. Benci, A geometrical index for the group  $S^1$  and some applications to the study of periodic solutions of ordinary differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), pp. 393-432
- [BP] V. Benci & F. Pacella, Morse theory for symmetric functionals on the sphere and an application to a bifurcation problem, MRC Technical Summary Report 2668, 1984.
- [C] A. Cambini, Sul lemma di Morse, Boll. U.M.I., (4), 7 (1973), pp. 87-93

- [Ch] K. Chang, Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), pp. 683-712.
- [CZ] C. Conley & E. Zehnder, Morse type index theory for flows and periodic solutions for hamiltonian equations, MRC Technical Summary Report, 2567, 1983.
- [D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [E] I. Ekeland, Une theorie de Morse pour les systemes hamiltoniens convexes, Ann. Inst. H. Poincaré, 1 (1984), pp. 19-78.
- [ES] S. Eilenberg & N. Steenrod, Axiomatic Approach to Homology Theory, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 31 (1945), pp. 117-120.
- [GM1] D. Gromoll & W. Meyer, On differentiable functions with isolated critical points, Topology, 8 (1969), pp. 361-369.
- [GM2] D. Gromoll & W. Meyer, Periodic geodesic on compact riemann manifolds, J. Diff. Geom., 3 (1969), pp. 493-510.
- [H] M. W. Hirsch, Differential Topology, Springer Verlag, New York, 1976.
- [Hi] N. Hingston, Equivariant Morse theory and closed geodesics, J. Diff. Geom., 19 (1984), pp. 85-116.
- [K1] W. Klingenberg, Closed geodesics, Ann. of Math., 89 (1969), pp. 75-90.
- [K2] W. Klingenberg, Lectures on Closed Geodesics, Springer Verlag, 1978.
- [Ko] J.L. Koszul, Sur certain groupes de transformation de Lie, Colleque de Geometrie Differentiable, Strasbourg, 1953.
- [L] D. Lupo, Teoria di Morse ed applicazioni a problemi ellittici non lineari, Magister Thesis, ISAS, Trieste, 1982.
- [Mi] J. Milnor, Morse Theory, Annals Study 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.

- [Mo] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, Amer. Math. Soc. Co. Pubbl., 18 (1934).
- [MP1] A. Marino & G. Prodi, La teoria di Morse per gli spazi di Hilbert, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 41 (1968), pp. 43-68.
- [MP2] A. Marino & G. Prodi, Metodi perturbativi nella teoria di Morse, Boll. U.M.I., (4), 11, Suppl. fasc. 3, (1975), pp. 1-32.
- [Pa] F. Pacella, Morse theory for flows in presence of a symmetry group, MRC Technical Summary Report, 2717, 1984
- [P] R. Palais, Morse theory on hilbert manifolds, Topology, 2 (1963), pp. 299-340.
- [Pr] G. Prodi, Problemi di diramazione per equazioni funzionali, Boll. U.M.I., 22 (1967), pp. 413-433.
- [Sp] E.H. Spanier, Algebraic Topology, Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [W1] A.G. Wasserman, Morse theory for G-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), pp. 384-388.
- [W2] A.G. Wasserman, Equivariant differential topology, Topology, 8 (1969), pp. 127-150.
- [Ra] P. H. Rabinowitz, Periodic solutions of hamiltonian systems: a survey, SIAM J. Math. Anal., 13 (1982), pp. 343-352.
- [B] H. Berestycki, Solutions periodiques de systemes hamiltoniens, Preprint Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1983.