ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL
FOR ADVANCED STUDIES

TESI DI MAGISTER PHILOSOPHIAE

"RISULTATI DI REGOLARITA' E PARZIALE REGOLARITA' PER SOLUZIONI DI SISTEMI ELLITTICI NON LINEARI"

Settore : ANALISI FUNZIONALE E APPLICAZIONI

Supervisore: Prof. S. CAMPANATO

Candidato : Laura RECINE

Anno Accademico : 1983/84

SISSA - SCUOLA
INTERNAZIONALE
SUPERIORE
STUDI AVANZATI
TRIESTE
Strada Costiera 11

TRIESTE

PREMESSA

In questa tesi vengono esposti alcuni risultati sulla regolarità holderiana di soluzioni di sistemi ellittici non lineari.

Nel primo capitolo vengono date le definizioni di sistemi ellittici e fortemente ellittici non lineari ad andamenti controllati e ad andamenti non controllati e viene detto in quale senso debbano intendersi le soluzioni di tali sistemi. Vengono, così, introdotte le definizioni di soluzioni variazionali e soluzioni distribuzione per vettori $u \in H^{1,q}(\Omega,R^N)$ $(u \in H^{1,q} \cap L^{\infty}(\Omega,R^N))$, $q>1$. Tuttavia la esposizione della teoria della regolarità holderiana è stata limitata al caso $q=2$, in quanto, nel caso generale $q>1$ la trattazione necessita di parecchie complicazioni tecniche ed inoltre i risultati sono ancora incompleti. Tale argomento si è ritenuto opportuno trattarlo diffusamente in lavori successivi.

Nel caso $q=2$ la teoria della regolarità si presenta assai diversa a seconda che i coefficienti del sistema abbiano andamenti controllati o quadratici.

Nel primo caso, studiato nel capitolo 5°, proviamo che, se $n\leq 4$ e i coefficienti del termine di ordine massimo dipendono solo da x e da Du, allora $u \in C^{0,\delta}(\Omega,R^N)$ con $\delta \in (0,1)$ opportuno, mentre negli altri casi u risulta parzialmente holderiana in Ω. Tale risultato non è migliorabile, come mostra un noto controesempio di Necas-Stara ([24]). Inoltre, nel caso generale, se $n>4$, detto Ω_0 l' insieme di singolarità della u, si prova $H_{n-q}(\Omega_0) = 0$ per qualche $q \in (2,3)$, mentre, se $n>4$ non è possibile alcun controllo sulla misura di Hausdorff dell' insieme Ω_0. Invece, nel caso di sistemi ad andamenti quadratici, si prova solo un teorema di parziale holderianità, senza poter stimare la misura di Hausdorff dell' insieme Ω_0. Tuttavia ciò è possibile se il sistema è quasi-lineare e tale miglioramento è dovuto a un teorema di massimo modulo per sistemi lineari e a coefficienti costanti.

La teoria della regolarità esposta si basa su alcuni teoremi di regolarità L^p che, oltre ad avere un interesse loro proprio, giocano un ruolo fondamentale nello studio della regolarità dei sistemi ellittici (e parabolici).

Si è esaminato, anche, il problema dell' ulteriore regolarità della soluzione u. A tale scopo si è introdotto il concetto di differenziabilità della soluzione e, successivamente, si è posto il problema della regolarità del gradiente Du. Infatti l' ulteriore regolarità segue dalla teoria dei sistemi lineari, come è esposto nel 2° capitolo.

Inoltre si sono considerate soluzioni di sistemi ellittici solo del 2° ordine. E' nota anche una teoria per sistemi ellittici di ordine 2m con $m>1$, ma le complicazioni sono di carattere formale, per cui, per maggiore chiarezza espositiva, si è ritenuto opportuno considerare solamente il caso $m=1$. Per la trattazione del caso $m>1$ si possono consultare, ad esempio, [Q] per i sistemi lineari, [9] e [12] per i sistemi non lineari.

La teoria esposta è in rapida evoluzione, per cui alcuni risultati sono già stati migliorati, ma di essi non si è potuto riferire in quanto ancora in corso di pubblicazione.

Colgo l' occasione per ringraziare il relatore, prof. S.Campanato.

CAPITOLO I

Nozioni introduttive.

Sia Ω un aperto limitato di R^n, $n \geq 2$, con frontiera sufficientemente regolare.

Sia $x=(x_1,\dots x_n)$ il generico punto di R^n. Indichiamo con $(\,|\,)_k$ e $\|\ \|_k$, rispettivamente, il prodotto scalare e la norma euclidea in R^k, $k \geq 2$.

Consideriamo il sistema differenziale non lineare di ordine 2

(1.1) $Eu = -\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u,Du) + a^o(x,u,Du)$ in Ω

ove a^i, $i=0,1,\dots n$ sono vettori di R^N, misurabili in x, continui in (u,p) e

$u\colon \Omega \to R^N$.

DEFINIZIONE 1.1. Diciamo che il sistema (1.1) è un sistema quasi lineare se

$a^i(x,u,Du) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x,u)D_j u + b_i(x,u)$ per ogni $i=1,\dots n$

ove $A_{ij} = \{A_{ij}^{hk}\}$ sono matrici NxN e b_i sono vettori di R^N.

in particolare se risulta anche $a^o \equiv 0$ il sistema si dice quasi lineare speciale.

Inoltre se risulta

$$a^i(x,u,Du) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)D_j u + A_i(x)$$

$$a^o(x,u,Du) = \sum_{i=1}^{n} B_i D_i u + Cu$$

ove $B_i = \{B_i^{hk}\}$, $A_{ij} = \{A_{ij}^{hk}\}$ sono matrici NxN, A_i e C sono vettori di R^N, il sistema è detto lineare.

Chiaramente un sistema lineare è quasi lineare. Se il sistema (1.1) è quasi lineare definiamo parte principale di E l' operatore

(1.2) $u \to E_o u = -\sum_{i=1}^{n} D_i(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x,u)D_j u)$.

DEFINIZIONE 1.2. Diremo che il sistema quasi lineare ha parte principale lineare se l' operatore E_o definito in (1.2) è lineare.

Siano E_o^{hk} gli operatori definiti da

$$E_o^{hk} = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{hk} D_j) \qquad \text{per ogni } h,k=1,\dots N.$$

Diremo che il sistema è diagonale se, definito $E_o u = \{E_o^{hk}\} u$ risulta $E_o^{hk} = 0$ per ogni $h \neq k$.

Poniamo $\Lambda = \Omega \times \mathcal{R}$ ove $\mathcal{R} = R^n \times R^{nN}$ e siano

$$(1.3) \qquad V(u,p) = (1 + \|u\|^2 + \|p\|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{per ogni } (u,p) \in \mathcal{R}$$

$$(1.4) \qquad V(p) = (1 + \|p\|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{per ogni } p \in R^{nN}$$

DEFINIZIONE 1.6. Diremo che il sistema (1.1) è fortemente ellittico se $p \leftrightarrow a^i(x,u,p)$, $i=1,\dots n$, sono differenziabili con derivate

$$\frac{\partial a_h^i(x,u,p)}{\partial p_k^j} \qquad h,k = 1,\dots N \qquad i,j = 1,\dots n$$

misurabili in x e continue in (u,p) ed inoltre esistono $q > 1$ e $\nu > 0$ tali che

$$(1.5) \qquad \sum_{h,k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_h^i(x,u,p)}{\partial p_k^j} \xi_h^i \xi_k^j \geq \nu\, V^{q-2}(u,p) \sum_{i=1}^{n} \|\xi^i\|_N^2$$

per ogni $(x,u,p) \in \Lambda$ e per ogni sistema $\{\xi^i\}_{i=1,\dots n}$ di vettori $\xi^i \in R^N$.

In particolare

$$(1.6) \qquad \sum_{h,k=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_h^i(x,u,p)}{\partial p_k^j} \xi_h^i \xi_k^j \geq \nu(M)\, V^{q-2}(p) \sum_{i=1}^{n} \|\xi^i\|_N^2$$

per ogni $(x,u,p) \in \Lambda$ con $\|u\| \leq M$ e per ogni sistema $\{\xi^i\}_{i=1\dots n}$ di vettori $\xi^i \in R^N$

DEFINIZIONE 1.7. Diremo che il sistema (1.1) è ellittico se $p \leftrightarrow a^i(x,u,p)$, $i=1,\dots n$ sono differenziabili ed esiste $\nu > 0$ tale che

$$(1.7) \qquad \sum_{h,k=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_h^i(x,u,p)}{\partial p_k^j} \lambda_i \lambda_j \eta_h \eta_k \geq \nu\, V^{q-2}(u,p) \|\lambda\|^2 \|\eta\|^2$$

per ogni $(x,u,p) \in \Lambda$, per ogni $\lambda \in R^n$ e per ogni $\eta \in R^N$.

Se il sistema (1.1) è quasi lineare le condizioni (1.5) e (1.7) si trasformano, rispettivamente, nelle seguenti

$$(1.8) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,u)\, \xi^i \mid \xi^j) \geq \nu\, V^{q-2}(u) \sum_{i=1}^{n} \|\xi^i\|_N^2$$

$$(1.9) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (A_{ij}(x,u)\eta \mid \eta) \geq \nu\, V^{q-2}(u)\, \|\lambda\|^2 \|\eta\|^2$$

Inoltre, se vale la (1.8), ossia se $E_o = \{E_o^{hk}\}$ è fortemente ellittico, tutti gli operatori della diagonale E_o^{hh} sono fortemente ellittici nel senso che

$$(1.10)\quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{hh}(x,u)\xi^i\xi^j \geqslant \nu V^{q-2}(u) \sum_{i=1}^{n} \|\xi^i\|_N^2$$

e analogamente se E_o è ellittico dalla (1.9) segue che tutti gli operatori della diagonale sono ellittici, cioè

$$(1.11)\quad \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j A_{ij}^{hh} \geqslant \nu V^{q-2}(u)\ \|\lambda\|^2 \qquad \text{per ogni } \lambda\in R^n.$$

Gli operatori E_o^{hk} con $h\neq k$ possono non essere ellittici, come mostra il seguente esempio.

Si consideri $n=N=2$ e sia E_o l' operatore definito da

$$E_o^{hk} = \begin{cases} \Delta & \text{se } h=k \\ 0 & \text{se } h\neq k \end{cases}$$

ove $\Delta = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Chiaramente E_o è ellittico, ma $E_o^{21}=E_o^{12}$ non è ellittico.

Osserviamo, inoltre, che la condizione (1.5) implica la condizione (1.7) come si verifica immediatamente sostituendo nella (1.5) $\xi^i=\lambda_i\eta$, $i=1,\dots n$, $\eta\in R^N$.

Le due condizioni (1.5) e (1.7) sono equivalenti nel caso delle equazioni ellittiche, ovvero se $N=1$, mentre se $N>1$ esistono operatori differenziali che verificano (1.7), ma non la condizione (1.5), come mostra il seguente esempio riportato in [7].

Si consideri il sistema differenziale dell' elastostatica

$$(1.12)\quad E_o u = -\ \alpha\,\Delta u - (\alpha + 2\beta)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ u$$

ove α e β sono costanti tali che $\alpha>0$ e $(\alpha+\beta)>0$ ed inoltre $N=n$.

Posto $\zeta_{ij}(u) = (D_i u_j + D_j u_i)/2$, all' operatore E_o corrisponde la forma bilineare

$$a(u,\varphi) = 2\int_\Omega \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \zeta_{ij}(u)\,\zeta_{ij}(\varphi) + \beta\ \mathrm{div}\ u\ \mathrm{div}\,\varphi\ dx$$

e la forma quadratica

$$a(u,u) = 2\int_\Omega \alpha \sum_{i,j=1}^{n} [\zeta_{ij}(u)]^2 + \beta\ (\mathrm{div}\ u)^2\ dx = \int_\Omega G(u)\ dx$$

L' operatore E_o si può scrivere in forma divergenza introducendo le matrici A_{ij} tali che

$$E_o u = - \sum_{ij} D_i (A_{ij} D_j u)$$

da cui segue

$$(1.13) \quad G(u) = \sum_{ij} (A_{ij} D_j u \mid D_i u) = \sum_{ij} \sum_{hk} A_{ij}^{hk} D_j u_k \, D_i u_h$$

ed inoltre

$$(1.14) \quad \sum_{ij} (A_{ij} \xi^j \mid \xi^i) = \sum_{ij} \sum_{hk} A_{ij}^{hk} \xi_k^j \xi_h^i$$

$$(1.15) \quad \sum_{ij} \xi_i \xi_j (A_{ij} \eta \mid \eta) = \sum_{ij} \sum_{hk} A_{ij}^{hk} \xi_j \eta_k \xi_i \eta_h$$

Quindi i primi membri delle (1.14) e (1.15) si ottengono formalmente dalla (1.13) sostituendo il termine $D_i u_j$ rispettivamente con ξ_j^i e $\xi_i \eta_j$.

Pertanto, per ogni $\xi, \eta \in R^n$, risulta

$$\sum_{ij} \xi_i \xi_j (A_{ij} \eta \mid \eta) = \alpha \|\xi\|^2 \|\eta\|^2 + (\alpha + 2\beta)(\sum_i \xi_i \eta_i)^2 \geqslant \nu \|\xi\|^2 \|\eta\|^2$$

ove

$$\nu = \begin{cases} \alpha & \text{se } (\alpha + 2\beta) \geqslant 0 \\ 2(\alpha + \beta) & \text{se } -\alpha < \beta < -\alpha/2 \end{cases}$$

ossia è verificata la condizione di ellitticità. Vediamo che, in generale, il sistema (1.12) non è fortemente ellittico. Infatti per ogni $\xi = (\xi^1, \ldots \xi^n)$ $\xi^i \in R^n$

risulta

$$\sum_{ij} (A_{ij} \xi^j \mid \xi^i) = \frac{\alpha}{2} \sum_{ij} (\xi_j^i + \xi_i^j)^2 + 2\beta (\sum_i \xi_i^i)^2 .$$

La condizione

$$\sum_{ij} (A_{ij} \xi^j \mid \xi^i) \geqslant \nu \sum_i \|\xi^i\|^2 \qquad \text{per ogni } \xi \in R^{n^2}$$

implica

$$\alpha n + \beta n^2 \geqslant \nu n \qquad \nu > 0 , \quad \alpha > 0, \quad \beta > -\alpha$$

(come si verifica sostituendo $\xi = (e^1, \ldots, e^n)$) e tale condizione non è verificata se $-\alpha < \beta < (\nu - \alpha)/n$.

Ci occupiamo, ora, di studiare quali limitazioni sull' andamento all' infinito dei vettori a^i, $i=0,1,\ldots n$ occorra supporre affinchè abbia senso parlare di soluzioni del sistema non lineare (1.1) e in quale senso debbano intendersi tali soluzioni. Nel seguito consideriamo $u \in H^{1,q}(\Omega, R^N)$ con $q>1$.

Supponiamo $q \leqslant n$, $n \geqslant 2$ e che per ogni $i=0,1,\dots n$ risulti

$$(1.16) \qquad \|a^i(x,u,p)\| \leqslant f_i(x) + c' \{\|u\|^\alpha + \|p\|^\beta\}$$

ove $f_i \in L^{q-1}(\Omega)$ ed inoltre

$$\begin{cases} \alpha \text{ qualsiasi} & \text{se } n=q \\ \alpha \leqslant qn/(n-q) & \text{se } n>q \\ \beta \leqslant q \end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.8. Definiamo andamenti lineari i seguenti

$$(1.17) \qquad \|a^i(x,u,p)\| \leqslant f_i(x) + c(\|u\|+\|p\|) \qquad \text{per ogni } (x,u,p) \in \Lambda$$

ove f_i sono sommmabili in Ω per ogni $i=0,1,\dots n$.

DEFINIZIONE 1.9. Definiamo andamenti controllati i seguenti

$$(1.18) \quad \begin{cases} \|a^i(x,u,p)\| \leqslant f_i(x) + c(\|u\|^\alpha + \|p\|^\delta) & \text{per ogni } i=1,\dots n \\ \|a^0(x,u,p)\| \leqslant f_0(x) + c(\|u\|^\beta + \|p\|^\gamma) \end{cases}$$

ove $f_i \in L^{q'}(\Omega)$, $i=1,\dots n$, $f_0 \in L^{q'n/(n+q')}(\Omega)$ se $n>q$ e $f_0 \in L^t(\Omega)$, $t \in (1,2)$ se $n=q$,

$\alpha, \beta, \gamma \geqslant 1$ verificano le seguenti limitazioni

$$\begin{cases} \alpha \leqslant n(q-1)/(n-q) & \text{se } n>q & \text{nessuna limitazione su} & \text{se } n=q \\ \beta \leqslant (nq-n+q)/(n-q) & \text{se } n>q & \text{nessuna limitazione su } \beta & \text{se } n=q \\ \delta \leqslant q-1 \\ \gamma \leqslant (nq-n+q)/n & \text{se } n>q & \gamma<q \text{ se } n=q. \end{cases}$$

Le condizioni (1.18) sono tali che

$$u \in H^{1,q}(\Omega, R^N) \Rightarrow \sum_{i=1}^n D_i a^i(\cdot,u,Du) + a^0(\cdot,u,Du) \in H^{-1,q'}(\Omega,R^N)$$

DEFINIZIONE 1.10. Diremo andamenti non controllati se sono verificate le condizioni (1.16), ma non sono verificate tutte le (1.18). In particolare definiremo andamenti naturali i seguenti

$$(1.19) \quad \begin{cases} \|a^i(x,u,p)\| \leqslant c(K)\, V^{q-1}(p) & q>1 \quad i=1,\dots n \\ \|a^0(x,u,p)\| \leqslant c(K)\, V^q(p) \end{cases}$$

per ogni $(x,u,p)\in\Lambda$ tali che $\|u\|\leq K$.

In particolare definiremo andamenti quadratici gli andamenti naturali con q=2.

In tal caso le condizioni (1.19) diventano

$$(1.20)\quad \begin{cases} \|a^i(x,u,p)\| \leq c_1(K)(1+\|p\|) & \text{per ogni } i=1,\dots n \\ \|a^o(x,u,p)\| \leq c_2(K)(1+\|p\|^2) \end{cases}$$

<u>DEFINIZIONE 1.11</u>. Diremo andamenti controllati non naturali se $a^i\in C^1(\Lambda,R^N)$, $i=0,1,..n$ ed inoltre esiste $q\geq 2$ tale che

$$(1.21)\quad \begin{cases} \|a^i\|+\sum_{s=1}^{n}\left\|\dfrac{\partial a^i}{\partial x_s}\right\|\leq c\, V^{q-1}(u,p) \\ \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\dfrac{\partial a^i}{\partial p_k^j}\right\|+\left\|\dfrac{\partial a^i}{\partial u_k}\right\|\right)\leq c\, V^{q-2}(u,p) \end{cases}$$

per ogni $i=0,1,\dots n$.

<u>DEFINIZIONE 1.12.</u> Diremo andamenti naturali sulle derivate se $a^i\in C^1(\Lambda,R^N)$, $i=0,1,\dots n$, ed inoltre esiste $q>1$ tale che per ogni $(x,u,p)\in\Lambda$ con $\|u\|\leq K$ e per ogni $i=0,1,\dots n$ risulti

$$(1.22)\quad \begin{cases} \|a^i\| + \sum_{s=1}^{n}\left\|\dfrac{\partial a^i}{\partial x_s}\right\|+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left\|\dfrac{\partial a^i}{\partial u_k}\right\|\leq c_1(K)\; V^{q-1}(p) \\ \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left\|\dfrac{\partial a^i}{\partial p_k^j}\right\|\leq c_2(K)\; V^{q-2}(p) \end{cases}$$

Definiamo le soluzioni nei casi in cui i coefficienti verifichino le limitazioni sopra indicate.

<u>DEFINIZIONE 1.13</u>. Nel caso di andamenti non controllati diremo che un vettore $u\in H^{1,q}(\Omega,R^N)$ è soluzione distribuzione del sistema Eu=0 se

$$(1.23)\quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n}(a^i(x,u,Du)\mid D_i\varphi)\,dx + \int_\Omega (a^o(x,u,Du)\mid\varphi)\,dx = 0$$

per ogni $\varphi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$.

<u>DEFINIZIONE 1.14</u>. Nel caso di andamenti controllati diremo che un vettore $u\in H^{1,q}(\Omega,R^N)$ è soluzione variazionale del sistema Eu=0 se

$$(1.24)\quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n}(a^i(x,u,Du)\mid D_i\varphi)\,dx + \int_\Omega (a^o(x,u,Du)\mid\varphi)\,dx = 0$$

per ogni $\varphi \in H_o^{1,q}(\Omega, R^N)$

Per ogni andamento non controllato, scelto un sottospazio $V \subset H^1(\Omega, R^N)$ esiste uno spazio vettoriale $V_o \supset C_o(\Omega, R^N)$ tale che l' espressione

(1.25) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n (a^i(x,u,Du) \mid D_i\varphi)\, dx + \int_\Omega (a^o(x,u,Du) \mid \varphi)\, dx$

ha senso per ogni $u \in V$ e per ogni $\varphi \in V_o$.

<u>DEFINIZIONE 1.15.</u> Definiamo soluzione debole del sistema $Eu=0$ un vettore $u \in V$ tale che

(1.26) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n (a^i(x,u,Du) \mid D_i\varphi)\, dx + \int_\Omega (a^o(x,u,Du) \mid \varphi)\, dx = 0$

per ogni $\varphi \in V_o$ se $\vartheta V \hookrightarrow V_o$ per ogni $\vartheta \in C_o^\infty(\Omega)$, cioè $\vartheta u \in V_o$ per ogni $u \in V$ e $\vartheta \in C_o^\infty(\Omega)$.

Le soluzioni variazionali sono anche soluzioni deboli. L' implicazione opposta è vera solo in opportune ulteriori ipotesi. Ad esempio in [5] si prova che se i coefficienti a^i hanno andamenti quadratici e soddisfano ulteriori condizioni allora se $\gamma \in (0,1)$

$u \in H^2_{loc} \cap C^{o,\gamma}(\Omega, R^N) \Rightarrow D_s u \in C^{o,\gamma}(\Omega, R^N)$ per ogni $s=1,\dots n$

e quindi u risulta anche soluzione variazionale.

In [Q] sono riportati alcuni esempi di sistemi ellittici con gli andamenti sopra considerati. Nel caso di andamenti controllati si possono considerare le soluzioni dell' equazione di Eulero di funzionali

$$H(u) = \int_\Omega f(x,u,Du)\, dx$$

ove si supponne $f\colon \Lambda \to R$ tale che $x \mapsto f(x,u,p)$ sia misurabile per ogni $(u,p) \in \mathcal{R}$ e $(u,p) \mapsto f(x,u,p)$ sia di classe C^1 per ogni $x \in \Omega$. Dalle ipotesi considerate segue che H è G-differenziabile su $H^1(\Omega, R^N)$; Per ogni $u, \varphi \in H^1(\Omega, R^N)$ risulta

$$\frac{\partial H(u)}{\partial \varphi} = \left[\frac{d}{dt} H(u+t\varphi)\right]_{t=0} = \int_\Omega \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x,u,Du)}{\partial p_k^i} D_i\varphi_k\, dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x,u,Du)}{\partial u_k^i} \varphi_k\, dx$$

Eguagliando a zero l' espressione sopra considerata si ottiene un sistema del tipo (1.24) con

$$a^i_k(x,u,p) = \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial p^i_k} \qquad \text{per ogni } i=1,\dots n$$

$$a^o_k(x,u,p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial u^i_k}$$

Soluzioni deboli di sistemi del tipo (1.25) ad andamento non controllato sono ad esempio le soluzioni dell' equazione di Eulero di "funzionali quadratici"

$$H(u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,u)D_i u \mid D_j \varphi)\, dx$$

ove $A_{ij}(x,u)$ sono matrici NxN misurabili in x e C^1 in u tali che A_{ij} sono simmetriche e limitate per ogni i,j=1,...n. Il funzionale H è definito su $H^1(\Omega,R^N)$, ma risulta G-differenziabile solo su $V=H^1(\Omega,R^N)\cap L^\infty(\Omega,R^N)$.

Per ogni $u,\varphi\in V$ risulta

$$\frac{\partial H(u)}{\partial\varphi} = \int_\Omega 2\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,u)D_i u \mid D_j\varphi)\, dx + \sum_{k=1}^{N}\sum_{ij=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial A_{ij}(x,u)}{\partial u_k} D_i u \mid D_j u\right)\varphi_k\, dx.$$

Osserviamo che se $u\in V$ è soluzione dell' equazione di Eulero $\frac{\partial H(u)}{\partial\varphi}=0$ per ogni $\varphi\in V$, a fortiori, risulta

$$(1.27) \qquad \frac{\partial H(u)}{\partial\varphi}=0 \qquad \text{per ogni } \varphi\in V_o = H^1_o(\Omega,R^N)\cap L^\infty(\Omega,R^N).$$

L' equazione (1.27) è un sistema del tipo (1.26) ove si ponga

$$a^i(x,u,p) = 2\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x,u)p_j \qquad \text{per ogni } i=1,\dots n$$

$$a^o(x,u,p) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ij}(x,u)}{\partial u_k} p_i \;\middle|\; p_j\right)$$

Notiamo che V,V_o e i coefficienti a^i verificano le condizioni richieste se i=1,...n mentre a^o non ha andamento controllato.

Per concludere introduciamo il concetto di sistema base.

<u>DEFINIZIONE 1.16.</u> Il sistema (1.1) è un sistema base se risulta

$$a^i = a^i(Du) \qquad \text{per ogni } i=0,1,\dots n.$$

In particolare se il sistema base è quasi-lineare i coefficienti a^i risultano costanti.

L' importanza che questa classe di sistemi riveste nella dimostrazione dei teoremi di regolarità è già nota nel caso dei sistemi lineari essendo stati introdotti in [Q] , come generalizzazione del lavoro [3] sulle equazioni ellittiche.

CAPITOLO II

Teoria della regolarità: generalità.

Dato $q>1$ e il sistema non lineare

$$(2.1)\quad Eu = -\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u,Du) + b(x,u,Du)$$

ci proponiamo di studiare i seguenti tre problemi di regolarità:

a) holderianità della soluzione u, cioè se $u\in H^{1,q}(\Omega,R^N)$ $[u\in H^{1,q}\cap L^{\infty}(\Omega,R^N)]$ è soluzione del sistema (2.1) vedere se esistono condizioni per cui risulti u holderiana in Ω, ossia $u\in C^{0,\lambda}(\Omega,R^n)$ per qualche λ tale che $0<\lambda<1$;

b) differenziabilità della soluzione u, cioè se $u\in H^{1,q}(\Omega,R^N)$ $[u\in H^{1,q}\cap L^{\infty}(\Omega,R^N)]$ è soluzione del sistema (2.1) vedere se risulta

$$(2.2)\begin{cases} u\in H^{2,2}_{loc}(\Omega,R^N) \\ V^{(q-2)/2}(Du)D_sD_ju \in L^2_{loc}(\Omega,R^N) \qquad \text{per ogni } j,s=1,\dots n \end{cases}$$

nel caso in cui $q\geq 2$ e

$$(2.3)\begin{cases} u\in H^{2,q}(\Omega,R^N) \\ V^{(q-2)/2}(Du)D_sD_ju \in L^2_{loc}(\Omega,R^N) \qquad \text{per ogni } j,s=1,\dots n \end{cases}$$

se $q\in(1,2)$;

c) holderianità del vettore Du, cioè se $u\in H^{1,q}(\Omega,R^N)$ $[u\in H^{1,q}\cap L^{\infty}(\Omega,R^N)]$ è soluzione del sistema (2.1) ed è differenziabile nel senso precisato al punto b), vedere se esistono condizioni per cui Du risulti holderiano in Ω, ossia $u\in C^{1,\lambda}(\Omega,R^N)$ per qualche λ tale che $0<\lambda<1$.

Il problema b) è stato risolto con condizioni naturali sulle derivate in [13] nel caso q=2 e in [9] nel caso generale $q>1$ e per sistemi ellittici di ordine 2m, $m\geq 1$, mentre per i sistemi ellittici del 2° ordine, nel caso particolare $q>n$ (quindi $u\in C^{0,\lambda}(\Omega,R^N)$ con λ opportuno) il risultato era già stato provato da Morrey in [21] e in [22].

Per i problemi a) e c) la situazione si presenta assai diversa a seconda che

N=1 oppure $N>1$. Infatti, nel caso delle equazioni, i problemi a) e c) ammettono risposta affermativa, come è provato in [20] e in [21]. Nel caso, invece, $N>1$, la risposta dipende da n. Infatti c' è holderianità globale solo nell' ulterio= re ipotesi $2\leq n\leq q+2$, mentre se $n>q+2$ si può richiedere solamente l' holderianità parziale.

<u>DEFINIZIONE 2.1.</u> Diremo che il vetttore u è parzialmente α-holderiano in Ω se esiste un sottoinsieme $\Omega_o \subset \Omega$ tale che

Ω_o è chiuso in Ω

$mis(\Omega_o) = 0$

$u\in C^{o,\alpha}(\Omega - \Omega_o)$

e diremo che Ω_o è l' insieme singolare del vettore u.

<u>DEFINIZIONE 2.2.</u> Sia A un insieme di R^N e $\varepsilon \geq 0$. La misura di Hausdorff di indice ε dell' insieme A è definita da

$$H_\varepsilon(A) = \liminf_{r\to 0}\{\sum_i (\text{diam } A_i)^\varepsilon : \bigcup_i A_i \supset A, \text{ diam } A_i < r\}$$

e la dimensione di Hausdorff dell' insieme A è definita da

$$\dim_H(A) = \inf\{\varepsilon\geq 0 : H_\varepsilon(A) = 0\}$$

Nel caso $N>1$, i problemi a) e c) debbono, quindi, essere riformulati in termini di parziale holderianità dei vettori u e Du e, introdotto l' insieme di singola= rità Ω_o, si pone il problema di valutare la misura di Hausdorff dell' insieme Ω_o.

La teoria della regolarità per i sistemi non lineari può dirsi conclusa quando si riescano a dimostrare i punti a), b) e c) in quanto in tali condizioni il si= stema non lineare (2.1) si può riscrivere come un sistema lineare a coefficienti regolari. Infatti dall' equazione

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n (a^i(x,u,Du) \mid D_i\varphi)\, dx + \int_\Omega (a^o(x,u,Du) \mid \varphi)\, dx = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$$

sostituendo $\varphi = D_s^2\psi$ con $\psi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$, s=1,...n otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n (D_s a^i(x,u,Du) \mid D_i D_s\psi)\, dx = \int_\Omega (a^o(x,u,Du) \mid D_s^2\psi)\, dx \qquad \text{per ogni } \psi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$$

Formalmente risulta

$$D_s a^i(x,u,Du) = \frac{\partial a^i(x,u,Du)}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a^i(x,u,Du)}{\partial u_k} D_s u_k + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a^i(x,u,Du)}{\partial p_k^j} D_s D_j u$$

da cui, posto

$$A_{ij}^{hk} = \frac{\partial a_h^i}{\partial p_k^j} \qquad A_{ij} = \{A_{ij}^{hk}\} \qquad \text{per ogni } i,j=1,\dots n \;\; h,k=1,\dots N$$

$$F^{is} = -\left(\frac{\partial a^i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{n} D_s u_k \frac{\partial a^i}{\partial u_k} \right)$$

si ottiene

$$(2.4) \quad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,u,Du) D_s D_j u \mid D_s D_i \psi)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,s=1}^{n} (F^{is}(x,u,Du) \mid D_s D_i \psi)\, dx + \int_\Omega \sum_{s=1}^{n} (a^o(x,u,Du) \mid D_s^2 \psi)\, dx$$

per ogni $\psi \in C_o^\infty(\Omega, R^N)$.

I coefficienti $A_{ij}(x,u,p)$, $(x,u,p)\in\Lambda$, sono matrici NxN, limitate e dall' ipote= si (1.5) segue

$$\sum_{h,k=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{hk}(x,u,p)\xi_h^i \xi_k^j \geq \nu \sum_{i=1}^{n} \|\xi^i\|_N^2$$

cioè la condizione (1.8).

Pertanto, siccome i vettori a secondo membro dipendono da u e Du, ma non dalle derivate seconde della u, il sistema (2.4) può riguardarsi come un sistema for= temente ellittico quasi-lineare speciale di ordine 4 che formalmente si può ri= scrivere nel modo seguente

$$(2.5) \quad \sum_{i,j,s=1}^{n} D_{si}(A_{ij}(x,u,Du) D_{sj} u) = \sum_{i,s=1}^{n} D_{is} F^{is}(x,u,Du) + \sum_{s=1}^{n} D_{ss} a^o(x,u,Du).$$

Pertanto se si suppone che i vettori a^i siano differenziabili, $\frac{\partial a^i}{\partial p_k^j}$, a^o e F^{is}

$i,j,s=1,\dots n$ $h,k=1,\dots N$ siano continui e si dimostra che il vettore Du è holderiano (in un opportuno sottoinsieme di Ω) il sistema (2.5) diventa un sistema lineare di ordine 4 a coefficienti continui e, quindi, dalla teoria sviluppata per i sistemi lineari segue che è risolto il problema della regola= rità di u.

Concludiamo il capitolo osservando che, se proviamo che u è holderiana in Ω, allora con un procedimento analogo a quello seguito per provare la (2.4), il sistema (2.1) può esssere visto come un sistema quasi lineare nel vettore U=Du. Se si prova l' holderianità anche del gradiente, allora il sistema può essere riguardato come un sistema lineare a coefficienti regolari, del secondo ordine, nel vettore Du.

CAPITOLO III

Alcuni spazi funzionali.

In questo capitolo riportiamo alcuni noti risultati sugli spazi di Sobolev $H^{m,p}(\Omega,R^N)$ e, successivamente, richiamiamo la definizione ed alcune proprietà degli spazi $L^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ e $\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$, per le cui dimostrazioni rimandiamo a [Q] e a [2] .

§ 1. Spazi $H^{m,p}(\Omega,R^N)$

Richiamiamo alcune note definizioni.

$C^k(\bar\Omega,R^N)$, $k\in N$ è lo spazio dei vettori continui in $\bar\Omega$ con le loro derivate di ordine $|\alpha|\leqslant k$ e la norma è definita da

$$\|u\|_{C^k(\bar\Omega,R^N)} = \sup\{|D^\alpha u(x)| : x\in\Omega, |\alpha|\leqslant k\}$$

Se $\gamma\in(0,1]$, $k\in N$, denotiamo con $C^{k,\gamma}(\bar\Omega,R^N)$ il sottospazio di $C^k(\bar\Omega,R^N)$ dei vettori γ-holderiani in $\bar\Omega$ e poniamo

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar\Omega,R^N)} = \|u\|_{C^k(\bar\Omega,R^N)} + |||u|||_{C^{k,\gamma}(\bar\Omega,R^N)}$$

ove

$$|||u|||_{C^{k,\gamma}(\bar\Omega,R^N)} = \sup\left\{\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\gamma} : x\in\Omega,\ y\in\Omega,\ x\neq y \text{ e } |\alpha|=k\right\}.$$

Posto

$$d_\Omega = \inf\{\|x-y\| : x\in\Omega,\ y\notin\Omega\}$$

si ha il seguente teorema

<u>TEOREMA 3.1 (SOBOLEV).</u> Se Ω ha la proprietà di cono e $1<p<n/m$

$$H^{m,p}(\Omega,R^N) \subset L^{p_m^*}(\Omega,R^N) \qquad \text{con } 1/p_m^* = 1/p - m/n$$

e si ha la maggiorazione

$$\|u\|_{L^{p_m^*}} \leqslant c_1 \sum_{j=0}^{m} d^{j-m} |u|_{H^{1,p}} \tag{3.1}$$

Se $p>n/m$ allora

$$H^{m,p}(\Omega,R^N) \subset C^o(\bar{\Omega},R^N)$$

e si ha la maggiorazione

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}} \|u(x)\| \leqslant c_2 \sum_{j=0}^{m} d_\Omega^{j-n/p} |u|_{H^{1,p}} \tag{3.2}$$

Se $p>n$ e $\partial\Omega$ è localmente lipschitziana

$$H^{1,p}(\Omega,R^N) \subset C^{o,\gamma}(\bar{\Omega},R^N) \qquad \text{con } \gamma=1-n/p$$

e sussiste la maggiorazione

$$\|u\|_{C^{o,\gamma}} \leqslant \|u\|_{H^{1,p}} \tag{3.3}$$

ove c_1 e c_2 sono stabili per omotetia.

<u>TEOREMA 3.2 (RELLICH).</u> Se Ω ha la proprietà di cono e $p\in[1,n]$ l' immersione $j: H^{1,p}(\Omega,R^N) \to L^q(\Omega,R^N)$ è compatta per ogni $q\in[1,p^*)$ ove si assuma $p^*=+\infty$ se se $p=n$.

<u>TEOREMA 3.3.</u> Se Ω ha frontiera $\partial\Omega$ localmente lipschitziana e $p>n$ l' immersione $j: H^{1,p}(\Omega,R^N) \to C^o(\Omega,R^N)$ è compatta.

Denotata con u_Ω la media integrale di u su Ω, cioè

$$u_\Omega = \int\!\!\!\!-_\Omega u\,dx = (\text{mis}\,\Omega)^{-1}\int_\Omega u\,dx$$

si ha il seguente teorema

<u>TEOREMA 3.4 (POINCARE').</u> Se Ω è convesso, per ogni $u\in H^{1,p}(\Omega,R^N)$ si ha

$$\|u-u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c_1\, d_\Omega\, |u|_{H^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{se } p\in[1,+\infty) \tag{3.4}$$

$$\|u-u_\Omega\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant c_2\, d_\Omega\, |u|_{H^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{se } p\in[1,n) \tag{3.5}$$

ove c_1 e c_2 sono stabili per omotetia.e $p^*=p_1^*$.

§2. Spazi $L^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ e $\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$

Introduciamo alcune notazioni.

Poniamo

$$B(x_o,r) = \{ x \in R^n : \|x-x_o\| < r \}$$

$$\Omega(x_o,r) = \Omega \cap B(x_o,r).$$

Se A e B sono spazi di Banach, $A \cong B$ significa

$$A \subset B \subset A \qquad \text{con norme equivalenti.}$$

Se Ω è un aperto limitato di R^n, definiamo gli spazi di Morrey $L^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ nel modo seguente

DEFINIZIONE 3.4. Siano $q \geq 1$ e $\lambda \in [0,n]$. Si definisce $L^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ come l' insieme delle $u: \Omega \to R^N$ per le quali risulta finito il numero

$$\text{(3.6)} \qquad \|u\|_{L^{q,\lambda}} = \sup \left\{ \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega(x_o,r)} |u(x)|^q \, dx \right)^{1/q} : x_o \in \bar{\Omega},\ 0<r<d_\Omega \right\}.$$

Si prova che l' applicazione $L^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ $u \mapsto u_{L^{q,\lambda}}$

è una norma che rende $L^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ spazio di Banach.

Come è noto si può provare immmediatamente il seguente teorema

TEOREMA 3.5. Per ogni $q \geq 1$ e $\lambda \geq 0$ sussiste l' immersione continua

$$L^{q,\lambda}(\Omega,R^N) \hookrightarrow L^q(\Omega,R^N)$$

e in particolare per ogni $q \geq 1$ valgono gli isomorfismi bicontinui

$$L^{q,0}(\Omega,R^N) \cong L^q(\Omega,R^N)$$

$$L^{q,n}(\Omega,R^N) \cong L\ (\Omega,R^N).$$

DEFINIZIONE 3.6. $\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$, $q \geq 1$, $\lambda \geq 0$ è il sottospazio lineare delle funzioni $u \in L^q(\Omega,R^N)$ per cui risulta finito il numero

$$|||u|||_{\mathcal{L}^{q,\lambda}} = \sup \left\{ r^{-\lambda/q} \|u-u_r(x_o)\|_{L^q(\Omega(x_o,r),\ R^N)} : x_o \in \Omega,\ r>0 \right\}$$

ove $u_r(x_o)$ denota la media integrale di u su $\Omega(x_o,r)$.

In [2] è provato che l' applicazione $\| \|_{\mathcal{L}^{q,\lambda}} : \mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N) \to R$ definita da

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{q,\lambda}} = \|u\|_{L^q(\Omega,R^N)} + \|u\|_{\mathcal{L}^{q,\lambda}}$$

è una norma che rende $\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ spazio di Banach.

DEFINIZIONE 3.7. Un aperto Ω è di tipo (A) se esiste $k\in R^+$ tale che per ogni $x_o \in \bar{\Omega}$ ed $r\in(0,d_\Omega]$ risulti

$$\text{mis}\, \Omega(x_o,r) \geqslant k\, r^n.$$

TEOREMA 3.8. ([Q]). Se Ω è di tipo (A) per ogni $q\geqslant 1$ si hanno le seguenti proprietà:

i) se $\lambda\in[0,n)$ vale l' isomorfismo bicontinuo

$$L^{q,\lambda}(\Omega,R^N) \cong \mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$$

ii) se $\lambda\in(n,n+q]$ si ha

$$\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N) \cong C^{0,\gamma}(\bar{\Omega},R^N) \qquad \text{ove } \gamma=(\lambda-n)/q$$

iii) se $\lambda>n+q$ $\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,R^N)$ è isomorfo (sia algebricamente che topologicamente) al sottospazio di $L^q(\Omega,R^N)$ delle funzioni $u=(u_1,\dots u_N)$ le cui componenti u_i, $i=1,\dots N$ sono costanti.

TEOREMA 3.9. ([25]). Per ogni $q\geqslant 1$ e per ogni $p\geqslant 1$ sussiste l' isomorfismo bicontinuo

$$\mathcal{L}^{p,n}(\Omega,R^N) \cong \mathcal{L}^{q,n}(\Omega,R^N).$$

Lo spazio $\mathcal{L}^{p,n}(\Omega,R^N)$ si denota, usualmente, con il simbolo $\mathcal{E}_o(\Omega,R^N)$ e nel caso " Ω cubo di R^n " F.John e L.Nirenberg ne hanno dato una caratterizzazione in [20].

Dal teorema di Poincarè segue facilmente il seguente teorema

TEOREMA 3.10. Se Ω è un aperto convesso e limitato di R^n, $u\in H^{1,p}(\Omega,R^N)$, $D_i u\in L^{p,\lambda}(\Omega,R^N)$ per ogni $i=1,\dots n$ e per ogni $\lambda\in[0,n)$ allora risulta $u\in\mathcal{L}^{q,\nu}(\Omega,R^N)$ ove $\nu=n+q(p-n+\lambda)/p$ e per ogni $q\in[1,p^*]$ se $p\in(1,n)$ e per ogni $q\in[1,\infty)$ se $p\geqslant n$.

CAPITOLO IV

Regolarità dei sistemi lineari.

Consideriamo il sistema lineare ridotto alla parte principale

$$(4.1) \qquad E_o u = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}(x)D_j u) = F$$

ove A_{ij} sono matrici NxN tali che $A_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ per ogni $i,j=1,\ldots n$ e sia

$$M = \sup_{x\in\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|A_{ij}(x)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) differenziabilità della soluzione u.

Dimostriamo un risultato di differenziabilità delle soluzioni distribuzioni.

Sia $B(r) = B(x_o, r)$ una sfera di R^n.

LEMMA 4.1. Se $u \in H^{1,p}(B(r),R^N)$, $p \geq 1$, $t \in (0,1)$ e $|h| < (1-t)r$, definito

$$(4.2) \qquad \tau_{i,h} u(x) = \frac{u(x+he^i) - u(x)}{h}$$

risulta

$$(4.3) \qquad \|\tau_{i,h} u\|_{L^p(B(tr))} \leq \|D_i u\|_{L^p(B(r))} \qquad \text{per ogni } i=1,\ldots n.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\tau_{i,h} u = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+the^i)\, dt = \int_0^1 (D_i u)(x+the^i)\, dt$$

da cui segue

$$\int_{B(tr)} \|\tau_{i,h} u\|^p dx \leq \int_0^1 dt \int_{B(tr)} \| D_i u(x+the^i)\|^p dx \leq \int_{B(r)} \|D_i u\|^p dx. \qquad \square$$

Per ogni $u \in H^1(\Omega,R^N)$ e per ogni $\varphi \in H_o^1(\Omega,R^N)$ poniamo

$$a(u,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} D_j u + A_i u\right) D_i \varphi \, dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} B_i D_i u + Cu\right) \varphi \, dx$$

$$a_o(u,\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} A_{ij} D_j u \, D_i \varphi \, dx.$$

TEOREMA 4.2. Se u $L^p(B(r),R^N)$, $1<p<+\infty$, ed esiste $M>0$ tale che

$$(4.4) \qquad \| \tau_{i,h} u\|_{L^p(B(tr))} \leq M \qquad \text{per ogni } |h| < (1-t)r \text{ e } i=1,\ldots n$$

allora $u \in H^{1,p}(B(r),R^N)$ e vale la maggiorazione

Dimostrazione. Fissato i tale che $1\leq i\leq n$, essendo $L^p(B(tr),R^N)$ riflessivo segue che esiste una successione $\{h_m\}_{m\in N}$ tale che $\lim_{m\to\infty} h_m=0$ ed esiste $v^i\in L^p(B(tr),R^N)$ tale che

$$(4.26)\qquad \tau_{i,h_m} \rightharpoonup v^i \quad \text{debolmente in } L^p(B(tr),R^N).$$

Per ogni $\varphi\in C_o^\infty(B(tr),R^N)$ segue che

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B(tr)} (\tau_{i,h_m} u \mid \varphi)\, dx = \int_{B(tr)} (v^i \mid \varphi)\, dx.$$

Quindi

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B(tr)} (u \mid \tau_{i,-h_m}\varphi)\, dx = -\int_{B(tr)} (v^i \mid \varphi)\, dx$$

da cui si ha

$$\int_{B(tr)} (u \mid D_i\varphi)\, dx = -\int_{B(tr)} (v^i \mid \varphi)\, dx \qquad \text{per ogni } \varphi\in C_o^\infty(B(tr),R^N)$$

Pertanto risulta

$$v^i = D_i u \qquad \text{nel senso delle distribuzioni su } B(tr).$$

Essendo $\partial B(tr)$ regolare da (4.4) e (4.6) segue $u\in H^{1,p}(B(tr),R^N)$ e

$$v^i = D_i u \qquad \text{nel senso di } H^{1,p}(B(tr),R^N).$$

Quindi per ogni $g\in L^q(B(tr),R^N)$ ove $p^{-1}+q^{-1}=1$, si ha

$$\left|\int_{B(tr)} (\tau_{i,h_m} u \mid g)\, dx\right| \leq M\, \|g\|_{L^q(B(tr))}$$

da cui

$$\left|\int_{B(tr)} (D_i u \mid g)\, dx\right| \leq M\, \|g\|_{L^q(B(tr))}$$

Quindi si conclude

$$\|D_i u\|_{L^p(B(tr))} \leq M \qquad \text{per ogni } i=1,\dots n. \qquad \square$$

TEOREMA 4.3 (Garding) ([1]). Se l' operatore E è ellittici, $A_{ij}\in C^o(\bar\Omega)$, A_i, B_i, $D\in L^\infty(\Omega)$ per ogni $i,j=1,\dots n$, esistono due costanti positive c_o, c_1; c_o stabile per omotetia, tali che per ogni $u\in H_o^1(\Omega,R^N)$

$$(4.7)\qquad a(u,u)\geq c_o\nu\, |u|^2_{H^1(\Omega)} - c_1\, d_\Omega^{-2}\, \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Poniamo $A_i = A_{i0}$, $B_i = A_{0i}$ e $C = A_{00}$ per ogni $i=1,\dots n$.

TEOREMA 4.4. Sia $u \in H^1(B(r), R^N)$ soluzione distribuzione in $B(r)$ del sistema (4.1) che supponiamo ellittico. Se $A_{ij} \in C^1(\overline{B(r)})$, $i,j=1,\dots n$ e $F \in L^2(B(r))$ allora per ogni $\rho \in (0,r)$ risulta $u \in H^2(B(\rho), R^N)$ e vale la maggiorazione

$$\|u\|_{H^2(B(\rho))} \leq c \left\{ \|F\|_{L^2(B(r))} + \|u\|_{H^1(B(r))} \right\}$$

ove c dipende da ρ, r e diverge per $\rho \to r$.

Dimostrazione. Siano $\rho \in (0,r)$ e

$$\tau_{s,t} u(x) = t^{-1}(u(x+te^s)-u(x)) \qquad \text{con } |t| \leq (r-\rho)/4.$$

Sia $\vartheta \in C_0^\infty(R^n)$ con $0 \leq \vartheta \leq 1$, $\vartheta = 1$ su $B(\rho)$, $\vartheta = 0$ in $R^n - B(r_0)$ ove $r_0 = (\rho + r)/2$.

Sia s un intero tale che $1 \leq s \leq n$; per ogni $\varphi \in H_0^1(B(r), R^N)$ si ha

(4.8) $|a(\tau_{s,t}(\vartheta u), \varphi)| \leq |a(\tau_{s,t}(\vartheta u)\varphi) + a(\vartheta u, \tau_{s,-t}\varphi)| + |a(\vartheta u, \tau_{s,-t}\varphi) - a(u, \vartheta\tau_{s,-t}\varphi)| +$

$+ |\langle f, \vartheta\tau_{s,-t}\varphi \rangle| = A+B+C.$

Poichè $\vartheta\tau_{s,-t}\varphi \in H_0^1(B(r), R^N)$ per il lemma 4.1 e la diseguaglianza di Sobolev segue

$$C \leq \|f\|_{L^2(B(r))} \|\vartheta\tau_{s,-t}\varphi\|_{L^2(B(r))} \leq c(\rho,r) \|f\|_{L^2(B(r))} \|\tau_{s,-t}\varphi\|_{L^2(B(r_0))} \leq$$

$$\leq c \|f\|_{L^2(B(r))} |\varphi|_{H^1(B(r))}$$

$$B = \left| \int_{B(r_0)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} D_i\vartheta \{(A_{ij}u | \tau_{s,-t}D_j\varphi) - (A_{ij}D_j u | \tau_{s,-t}\varphi)\} dx \right|.$$

Essendo $A_{ij} \in C^1(B(r))$ per il lemma 4.1 e la diseguaglianza di Sobolev si ha

$$\left| \int_{B(r_0)} (D_i\vartheta A_{ij}u | \tau_{s,-t}D_j\varphi) \, dx \right| = \left| \int_{B(r_0)} (\tau_{s,t}[D_i\vartheta A_{ij}u] | D_j\varphi) \, dx \right| \leq$$

$$\leq c(\rho,r) \|u\|_{H^1(B(r))} |\varphi|_{H^1(B(r))}.$$

Analogamente

$$\left| \int_{B(r_0)} D_i\vartheta (A_{ij}D_j u | \tau_{s,-t}\varphi) \, dx \right| \leq c(\rho,r) \|u\|_{H^1(B(r))} |\varphi|_{H^1(B(r))}$$

da cui segue

$$(4.9)\qquad B \leqslant c(\rho,r)\ \|u\|_{H^1(B(r))}\ |\varphi|_{H^1(B(r))}$$

Maggioriamo A

$$A = \left| \int_{B(r_o)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \left\{ (A_{ij}\,\tau_{st} D_j(\vartheta u) | D_i\varphi) - (\tau_{st}[A_{ij} D_j(\vartheta u)] \,|\, D_i\varphi) \right\} dx \right| =$$

$$= \left| \int_{B(r_o)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (\tau_{st} A_{ij} D_j(\vartheta u)(x+te^s) |\ D_i\varphi)\ dx \right|$$

da cui per il lemma 4.1 e per la diseguaglianza di Sobolev segue

$$(4.10)\qquad A \leqslant c(\rho,r)\ \|u\|_{H^1(B(r))}\ |\varphi|_{H^1(B(r))}$$

Scelto $\varphi = \tau_{s,t}(\vartheta u)$ dalle maggiorazioni (4.8),(4;9) e (4.10) segue

$$a(\tau_{s,t}(\vartheta u),\ \tau_{s,t}(\vartheta u)) \leqslant c(\rho,r)\ \{ \|f\|_{L^2(B(r))} + \|u\|_{H^1(B(r))} \}\ |\tau_{s,t}(\vartheta u)|\ .$$

Per il teorema di Garding e per il lemma 4.1 risulta

$$|\tau_{s,t}(\vartheta u)|^2_{H^1(B(r_o))} \leqslant c(\nu,\rho,r)\ \{ \|f\|_{L^2(B(r))} + \|u\|_{H^1(B(r))} \}\ |\tau_{s,t}(\vartheta u)|_{H^1(B(r_o))} +$$

$$+\ c(\nu,r)\ \|\tau_{s,t}(\vartheta u)\|^2_{L^2(B(r_o))} \leqslant$$

$$\leqslant c(\nu,\rho,r)\ \{\|f\|_{L^2(B(r))} + \|u\|_{H^1(B(r))}\}\ |\tau_{s,t}(\vartheta u)|_{H^1(B(r_o))} + c(\nu,r)|\vartheta u|_{H^1(B(r_o))}$$

da cui

$$|\ \tau_{s,t}(\vartheta u)|^2_{H^1(B(r_o))} \leqslant c(\nu,\rho,r)\ \{ \|f\|^2_{L^2(Br))} + \|u\|^2_{H^1(B(r))} \}$$

Applicando il teorema 4.2 si conclude

$$\|u\|^2_{H^2(B(\rho))} \leqslant c(\nu,\rho,r)\ \{ \|f\|^2_{L^2(B(r))} + \|u\|^2_{H^1(B(r))} \}\ . \qquad \square$$

Diamo ora ora una dimostrazione del teorema 4.4.

Altra dimostrazione del teorema 4.4. Con le stesse notazioni ed ipotesi introdotte precedentemente, posto

$$\sigma_{s,t} u(x) = h\ \tau_{s,t} u(x) \qquad\qquad \text{con} \quad t < (r-\rho)/4$$

definiamo

$$\varphi = \sigma_{s,-t}(\vartheta^2 \sigma_{s,t} u).$$

Pertanto otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{ij} (A_{ij} D_j u \mid D_i \sigma_{s,t}(\vartheta^2 \sigma_{s,t} u)) \, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij} (\sigma_{s,t}(A_{ij} D_j u) \mid D_i \vartheta^2 \sigma_{s,t} u) \, dx =$$

$$= \int_\Omega (\sigma_{s,t}(A_{ij} D_j u) \mid \vartheta^2 D_i(\sigma_{s,t} u)) \, dx + \int_\Omega (\sigma_{s,t}(A_{ij} D_j u) \mid 2\, \sigma_{s,t} u \vartheta D_j \vartheta) \, dx.$$

Per brevità supponiamo che il sistema sia ridotto alla parte principale, altrimenti le complicazioni sono solo formali.

Essendo

$$\sigma_{s,t}(A_{ij} D_j u) = (\sigma_{s,t} A_{ij}) D_j u(x+te^s) + A_{ij} \sigma_{s,t} D_j u$$

segue

$$\int_\Omega (A_{ij} \sigma_{s,t} D_j u \mid \vartheta^2 D_i(\sigma_{s,t} u)) \, dx = -\int_\Omega ((\sigma_{s,t} A_{ij}) D_j u(x+te^s) \mid \vartheta^2 D_i(\sigma_{s,t} u)) \, dx +$$

$$- \int_\Omega ((\sigma_{s,t} A_{ij}) D_j u(x+te^s) \mid \sigma_{s,t} u \,\vartheta\, D_j \vartheta) \, dx \; - 2 \int_\Omega (A_{ij} \sigma_{s,t} D_j u \mid \sigma_{s,t} u \,\vartheta\, D_j \vartheta) dx +$$

$$+ \int_\Omega (F \mid \sigma_{s,-t}(\vartheta^2 \sigma_{s,t} u)) \, dx.$$

che possiamo riscrivere come $A = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$.

Con tali notazioni si può minorare A grazie all' ipotesi di ellitticità e si ha

$$A \geqslant \nu \int_\Omega \vartheta^2 \, \| \sigma_{s,t} Du \|^2 \, dx.$$

Analogamente alla dimostrazione precedente si possono maggiorare i termini B_i, $i=1,\dots 4$ e, quindi, applicando il teorema 4.2 si conclude. □

La 2° dimostrazione è stata riportata, sia pur brevemente, in quanto la stessa tecnica qui usata viene ripresa nello studio della differenziabilità per i sistemi non lineari, presentando nella nuova situazione solo alcune complicazioni formali.

b) regolarità holderiana per u e Du.

Premettiamo alcuni risultati che utilizzeremo nel seguito.

LEMMA 4.5([Q]). Siano $A>0$, $\alpha>0$, $\varphi\ \psi$: $(0,d] \to [0,+\infty)$ tali che

(4.11) $\qquad \lim_{r\to 0} \psi(r) = 0$

(4.12) $\qquad \varphi(tr) \leq \{A\, t^{\alpha} + \psi(r)\}\, \varphi(r) \qquad$ per ogni $t\in(0,1)$ e $r\in(0,d]$.

Allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $r_{\varepsilon}\in(0,d]$ tale che per ogni $t\in(0,1)$ e per ogni $r\in(0,r_{\varepsilon}]$

$$\varphi(tr) \leq (1+A)\ t^{\alpha-\varepsilon}\ \varphi(r).$$

LEMMA 4.6 ([Q]). Siano A,α,β costanti positive, $\beta<\alpha$ e siano $\varphi\psi:(0,d]\to[0,\infty)$ tali che per ogni $t\in(0,1)$ e per ogni $r\in(0,d]$ si ha

(4.13) $\qquad \varphi(tr) \leq A\ t^{\alpha}\ \varphi(r) + r^{\beta}\ \psi(r)$

Allora per ogni $\varepsilon\in(0,\alpha-\beta]$, per ogni $t\in(0,1)$ e per ogni $r\in(0,d]$ si ha

(4.14) $\qquad \varphi(tr) \leq A\ t^{\alpha-\varepsilon}\ \varphi(r) + C\ (tr)^{\beta}\ \psi(r)$

ove $C=C(A,\alpha,\beta,\varepsilon)$. In particolare per ogni $r\in(0,d]$ vale la maggiorazione

(4.15) $\qquad \varphi(r) \leq r^{\beta}\{A\ d^{-\beta}\ \varphi(d) + C\ \psi(d)\}$.

TEOREMA 4.7 (Cacciopoli)([Q]). Se $u\in H^{m}(B(2r),R^{N})$ è soluzione variazionale in $B(2r)$ del sistema $E_{o}u=F$ e se

$$A_{ij}\in L^{\infty}(B(2r)) \quad \text{e il sistema è fortemente ellittico}$$

oppure se

$$A_{ij}\in C^{o}(B(2r)) \quad \text{e il sistema è ellittico}$$

si ha la maggiorazione

(4.16) $\qquad \|u\|^{2}_{H^{m}(B(r))} \leq c_{1}\ r^{-2} \sum_{|\alpha|\leq m-1} \|D^{\alpha}u - (D^{\alpha}u)_{B(2r)}\|^{2}_{L^{2}(B(2r))} + c_{2}\ \|F\|^{2}_{H^{-m}(B(2r))}$.

TEOREMA 4.8 ([Q]). Se $u\in H^{m}(\Omega,R^{N})$ è soluzione del sistema ellittico $Eu=f$ e

$$A_{ij}\in C^{\infty}(\Omega), \qquad f\in C^{\infty}(\Omega,R^{N})$$

allora $u\in C^{\infty}(\Omega,R^{N})$.

Proviamo alcuni risultati per sistemi ellittici lineari a coefficienti costanti.

<u>TEOREMA 4.9</u>. Se $u\in H^1(B(r),R^N)$ è soluzione in $B(r)$ del sistema a coefficienti costanti $E_o u=0$, allora per ogni $t\in(0,1]$ *

$$(4.17)\qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, t^n\, |u|^2_{H^1(B(r))}$$

con c stabile per omotetia.

<u>Dimostrazione.</u> Supponiamo $u\in C^\infty(\overline{B(r)},R^N)$. Per il teorema di Cacciopoli si ha

$$|u|^2_{H^1(B(r/2))} \leqslant c\, r^{-2}\, \|u-u_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))}$$

Essendo E_o a coefficienti costanti risulta $E_o(D^\alpha u)=0$ per ogni α.

Pertanto scelto $r_h=2^{-(1+h)}r$ si ha

$$|u|^2_{H^{1+h}(B(r_h))} \leqslant c\, r^{-2}\, |u|^2_{H^h(B(r_{h-1}))} \qquad \text{per ogni } h\in N \text{ tale che } h\geqslant 1.$$

Per induzione segue

$$(4.18)\qquad |u|^2_{H^k(B(r_h))} \leqslant c\, r^{-2k}\, \|u-u_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))} \qquad \text{per ogni } k\geqslant 1,\ k \text{ intero.}$$

Sia s un intero $s>1+n/2$. Per il teorema di Sobolev si ha

$$(4.19)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sup_{B(r_{s-1})} \|D_i u\|^2 \leqslant c \sum_{j=0}^{s-1} r^{2j-n}\, |u|^2_{H^{1+j}(B(r_j))}$$

Pertanto se $t\in(0,2^{-s}]$ dalle maggiorazioni (4.18) e (4.19) si ottiene

$$(4.20)\quad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, t^n\, r^n \sum_{i=1}^{n} \sup_{B(r_{s-1})} \|D_i u\|^2 \leqslant c\, t^n \sum_{j=0}^{s-1} r^{2j}\, |u|^2_{H^{1+j}(B(r_j))} \leqslant$$

$$\leqslant c\, t^n\, r^{-2} \sum_{j=0}^{s-1} \|u-u_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))}$$

Per il teorema di Poincarè 3.4 dalla (4.20) segue la (4.17) nel caso in cui $t\in(0,2^{-s}]$

Se $t\in(2^{-s},1]$ la (4.17) è ovvia.

Osserviamo che se $u\in H^1(B(r),R^N)$ è soluzione del sistema $E_o u=0$ allora per il teorema 4.8 risulta $u\in C^\infty(B(r),R^N)$ e quindi $u\in C^\infty(\overline{B(\varepsilon r)},R^N)$ per ogni $\varepsilon\in(0,1)$.

Passando al limite per $\varepsilon\to 1$ nella maggiorazione (4.17) si ha la tesi. □

Il teorema precedente è di fondamentale importanza per la dimostrazione del teo=

* Per semplicità, nelle norme, scriviamo $(B(r))$ anzichè $(B(r),R^N)$.

rema di regolarità. Infatti la maggiorazione (4.17) permette di provare l' holderianità della soluzione u del sistema (4.1) nell' ipotesi che i coefficienti siano continui in $\overline{\Omega}$ e $F\in\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega,R^N)$ con $\lambda\in[0,n)$.

Nel caso, invece, in cui risulti solamente $A_{ij}\in L^{\infty}(\Omega)$ proveremo una maggiorazione analoga alla (4.17), ma in cui figurerà l' esponente εn, $\varepsilon\in(0,1)$, anzichè n. Tale maggiorazione impone l' ulteriore limitazione $\lambda\in[0,\varepsilon n)$ nella dimostrazione del teorema di holderianità della u. Un miglioramento di questo risultato, nel caso N=1 è fornito dal teorema 4.31, mentre se $N>1$ non è possibile ottenere un risultato analogo, come mostra un noto controesempio di De Giorgi.

<u>TEOREMA 4.10.</u> Se $u\in H^1(B(r),R^N)$ è soluzione in B(r) del sistema a coefficienti costanti $E_o u=0$ allora per ogni $t\in(0,1]$

$$(4.21)\qquad \sum_{j=1}^{n}\|D_j u-(D_j u)_{B(tr)}\|^2_{L^2(B(tr))}\leqslant c\,t^{n+2}\sum_{j=1}^{n}\|D_j u-(D_j u)_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))}$$

con c stabile per omotetia.

<u>Dimostrazione.</u> Come nel teorema precedente basta provare la maggiorazione (4.21) solamente nel caso $u\in C^{\infty}(\overline{B(r)},R^N)$. Se $t\in(0,2^{-s}]$ si ha la maggiorazione (4.20). Per la diseguaglianza di Poincarè (3.4) segue

$$(4.22)\qquad \|u-u_{B(tr)}\|^2_{L^2(B(tr))}\leqslant c\,t^2 r^2\,|u|^2_{H^1(B(tr))}$$

Da (4.20) e (4.22) si ottiene

$$\|u-u_{B(tr)}\|^2_{L^2(B(tr))}\leqslant c\,t^{n+2}\,\|u-u_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))}$$

Analogamente al teorema 4.9 si conclude anche nel caso $t\in(2^{-s},1]$. □

<u>TEOREMA 4.11([Q]).</u> Se E_o ha coefficienti continui in $\overline{\Omega}$ ed è ellittico, esiste $r_o>0$ tale che, per ogni $B(x_o,r)\subset\Omega$ con $r\leqslant r_o$, il sistema $E_o u=F$ ha soluzione variazionale unica in $H^1_o(B(x_o,r),R^N)$ e si ha

$$(4.23)\qquad |u|_{H^1(B(x_o,r))} \leqslant c\left\{\left(\int_{B(x_o,r)} \|f\|^{q_o}\,dx\right)^{1/q_o} + r^{\gamma_1}\left(\int_{B(x_o,r)} \sum_{j=1}^{n}\|f_j\|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

essendo $f\in L^{q_o}(\Omega,R^N)$, $f_j\in L^{q_1}(\Omega,R^N)$ per ogni $j=1,\dots n$ ove

$$q_o = \begin{cases} 2n/(n+2) & \text{se } n>2 \\ \in(1,2) & \text{se } n=2 \end{cases} \qquad \gamma_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } n>2 \\ 1 & \text{se } n=2 \end{cases}$$

<u>TEOREMA 4.12</u>. Se $u\in H^1(B(r),R^N)$ è soluzione variazionale in $B(r)$ del sistema ellittico a coefficienti costanti

$$(4.24)\qquad E_o u = F = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$$

con $f\in L^{q_o}(B(r),R^N)$, $f_j\in L^{q_1}(\Omega,R^N)$ per ogni $j=1,\dots n$, allora per ogni $t\in(0,1]$ si ha

$$(4.25)\qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, t^n\, |u|^2_{H^1(B(r))} + c\,\|f\|^2_{L^{q_o}(B(r))} + c\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|^2_{L^{q_1}(B(r))}$$

$$(4.26)\qquad |u-P(tr)|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant$$

$$\leqslant c\, t^{n+2}\, |u-P(r)|^2_{H^1(B(r))} + c\, r^{\gamma_1}\sum_{j=1}^{n}\|f_j - f_{j_{B(r)}}\|^2 + c\,\|f_o\|^2_{L^{q_o}(B(r))}$$

ove q_o e γ_1 sono definiti come nell' enunciato del teorema 4.11 e

$P(r)=\sum_{j=1}^{n}(D_j u)_{B(r)}\, x^j$.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $w\in H^1_o(B(r),R^N)$ la soluzione variazionale del teorema $E_o w=F$. Per il teorema 4.11 w è unica e soddisfa la maggiorazione

$$(4.27)\qquad |w|^2_{H^1(B(r))} \leqslant c\,\|f\|^2_{L^{q_o}(B(r))} + c\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|^2_{L^{q_1}(B(r))}$$

Posto $v=u-w$ risulta $v\in H^1(B(r),R^N)$ soluzione del sistema $E_o v=0$. Pertanto dal teorema 4.9 segue

$$(4.28)\qquad |v|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, t^n\, |v|^2_{H^1(B(r))} \qquad \text{per ogni } t\in(0,1].$$

Dalle (4.27) e (4.28) si ottiene

$$|u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant 2\,|v|^2_{H^1(B(tr))} + 2\,|w|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant$$

$$\leqslant c\, t^n |v|^2_{H^1(B(r))} + 2\,|w|^2_{H^1(B(r))} \leqslant c\, t^n |u|^2_{H^1(B(r))} + c\,|w|^2_{H^1(B(r))} \leqslant$$

$$\leqslant c\, t^n |u|^2_{H^1(B(r))} + c\,\|f\|^2_{L^{q_0}(B(r))} + \sum_{j=1}^n \|f_j\|^2_{L^{q_1}(B(r))}$$

Per dimostrare la (4.26) si procede in modo analogo utilizzando la maggiorazione (4.21) e tenendo conto che se u è soluzione del sistema (4.24), ovviamente u è soluzione anche del sistema

$$E_o u = -\sum_{j=1}^n D_j(f_j - f_{j_{B(r)}}) + f$$ □

<u>LEMMA 4.13.</u> Se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione distribuzione del sistema ellittico $E_o u=0$ con $A_{ij} \in C^o(\overline{\Omega})$, per ogni $\varepsilon \in (0,n]$ esiste $r_\varepsilon > 0$ tale che per ogni sfera $B(r)$ con $r \leqslant r_\varepsilon$ e per ogni $t \in (0,1)$

$$(4.29) \qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, t^{n-\varepsilon} |u|^2_{H^1(B(r))}$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia $B(x_o,r) \subset \Omega$; $u \in H^1(B(r), R^N)$ è soluzione del sistema

$$(4.30) \qquad \int_{B(x_o,r)} \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x_o) D_j u \mid D_i \varphi)\, dx =$$

$$= \int_{B(x_o,r)} \sum_{i,j=1}^n ([A_{ij}(x_o) - A_{ij}(x)]\, D_j u \mid D_i \varphi)\, dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in H^1_o(B(r), R^N)$$

Pertanto dalla continuità dei coefficienti A_{ij}, applicando, successivamente, il teorema 4.12 e il lemma 4.5 segue la maggiorazione (4.29). □

Proviamo, ora, i teoremi di regolarità per la soluzione u e per il gradiente Du. La tecnica che ora illustrerò è la medesima già introdotta nel lavoro [3]. Per tale ragione non riporterò tutte le dimostrazioni dei teoremi che seguono, ma darò solamente l' indicazione dei passsaggi più significativi.

<u>TEOREMA 4.14</u>. Siano $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione variazionale del sistema

$$(4.31) \qquad E_o u = f - \sum_{j=1}^n D_j f_j$$

con $A_{ij} \in C^o(\Omega)$ e $f \in L^{q_o, \lambda_o(\lambda)}(\Omega, R^N)$, $f_j \in L^{2,\lambda}(\Omega, R^N)$ per ogni $j=1,\dots n$ ove $\lambda \in [0,n)$, q_o è definito come nell' enunciato del teorema 4.11 e

$$(4.32)\qquad \lambda_o(\lambda) = \begin{cases} \lambda n/(n+2) & \text{se } n>2 \\ \lambda q_o/2 & \text{se } n=2 \end{cases}$$

Allora $D_j u \in L^{2,\lambda}(\Omega_o, R^N)$ per ogni $j=1,\ldots n$, per ogni aperto $\Omega_o \subset\subset \Omega$ e si ha

$$(4.33)\qquad \|u\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_o,R^N)} + \sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_o,R^N)} \leq c\{\|u\|^2_{H^1(\Omega,R^N)} + \Psi^2\}$$

ove $\Psi^2 = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2_{L^{2,\lambda}} + \|f\|^2_{L^{q_o,\lambda_o(\lambda)}}$ e $c\to\infty$ se $\mathrm{dist}(\Omega_o,\partial\Omega)\to 0$.

Dimostrazione. Se $\lambda\in[0,n)$ poniamo

$$r_\lambda = r_\varepsilon \wedge r_o \qquad \text{con } \varepsilon = (n-\lambda)/2$$

ove r_ε è definito come nel lemma 4.13 e r_o come nel teorema 4.11.

Sia $B(r)=B(x_o,r)\subset\subset\Omega$ con $r\leq r_\lambda$. In $B(r)$ scriviamo $u=v+w$ ove $w\in H^1_o(B(\rho),R^N)$ è soluzione variazionale del sistema (4.31). Pertanto applicando il teorema 4.11 alla soluzione w si ottiene

$$(4.34)\qquad |w|^2_{H^1(B(r))} \leq c\, r^\lambda \Psi^2$$

Siccome $v=u-w\in H^1(B(r),R^N)$ è soluzione del sistema $E_o v=0$, essendo $r\leq r_\lambda$, applicando il lemma 4.13 segue

$$(4.35)\qquad |v|^2_{H^1(B(tr))} \leq c\, t^{(n+\lambda)/2} |v|^2_{H^1(B(r))} \qquad \text{per ogni } t\in(0,1)$$

Dalle (4.34),(4.35) e dal lemma 4.5 ove si assuma $\varepsilon=(n-\lambda)/2$ segue

$$(4.36)\qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leq c\,(tr)^\lambda \{r^{-\lambda}|u|^2_{H^1(B(r))} + \Psi^2\}$$

per ogni $t\in(0,1)$ e per ogni $r\leq r_\lambda \wedge d(x_o)$ ove $d(x_o)=\mathrm{dist}\{x_o,\partial\Omega\}$. Sia Ω un aperto strettamente contenuto in Ω e $d_o=\mathrm{dist}(\overline{\Omega}_o,\partial\Omega)$. Allora per ogni $x_o\in\Omega_o$ e $r<r_\lambda\wedge d_o$ si ha

$$(4.37)\qquad |u|^2_{H^1(\Omega_o(x_o,r))} \leq c\, r^\lambda \quad |u|^2_{H^1(\Omega)} + \Psi^2$$

ove c dipende da d_o e diverge se d_o tende a zero. La (4.37) è banalmente vera se $r_\lambda\wedge d_o\leq r\leq d_o$ e quindi si conclude. □

OSSERVAZIONE 4.15. Dal teorema 3.10 segue $u \in \mathcal{L}^{2,\lambda+2}(\Omega_o, R^N)$; pertanto se $\lambda > n-2$ risulta $u \in C^{o,\gamma}(\Omega_o, R^N)$ ove $\gamma = (\lambda+2-n)/2$ e Ω_o è un aperto di R^n tale che $\Omega_o \subset\subset \Omega$.

TEOREMA 4.16. Sia $u \in H^1(\Omega, R^N)$ soluzione variazionale del sistema ellittico

$$(4.38) \qquad E_o u = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$$

con $A_{ij} \in C^{o,\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\varepsilon \in (0,1)$, $f \in \mathcal{L}^{q_o, \lambda_o(n)}(\Omega, R^N)$, $f_j \in \mathcal{L}^{2,n}(\Omega, R^N)$ per ogni $j=1,..n$ ove q_o e $\lambda_o(n)$ sono definiti, rispettivamente, come negli enunciati dei teoremi 4.11 e 4.14.

Allora per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ con $r \leq r_\varepsilon \wedge r_o$ si ha

$$(4.39) \qquad \sum_{j=1}^{n} \int_{B(r)} \| D_j u - (D_j u)_{B(r)} \|^2 \, dx \leq$$

$$\leq c\, r^n \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} | D_j u |^2 \, dx + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{q_o, \lambda_o(n)}} + \sum_{j=1}^{n} \| f_j \|^2_{\mathcal{L}^{2,n}} \right\}$$

e quindi

$$D_j u \in \mathcal{L}^{2,n}_{loc}(\Omega, R^N) \qquad \text{per ogni } j=1,...n.$$

Dimostrazione. Se $\alpha \in (0,\nu)$ si verifica immediatamente

$$\mathcal{L}^{2,\nu}(\Omega, R^N) \subset \mathcal{L}^{2,\nu-\alpha}(\Omega, R^N)$$

e l' immersione è continua. Pertanto, dalla i) del teorema 3.8 segue che possiamo applicare il teorema 4.14. Scrivendo u=v+w con u e w definite analogamente al teorema 4.1 con calcoli ormai standard segue la tesi. □

Osservazione 4.17. Dai teoremi 4.16 e 3.10 segue che, nelle ipotesi del teorema precedente, risulta $u \in C^{o,\varepsilon}(\bar{\Omega}_o, R^N)$ per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ e per ogni aperto $\Omega_o \subset\subset \Omega$.

Enunciamo, ora, il teorema di regolarità holderiana per le derivate prime. La dimostrazione di tale teorema è analoga a quella del teorema 4.16.

TEOREMA 4.18. Sia $u \in H^1(\Omega, R^N)$ soluzione variazionale del sistema ellittico

$$(4.40) \qquad E_o u = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$$

con $A_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, R^N)$, $\alpha \in (0,1)$, $f_j \in \mathcal{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega, R^N)$ per ogni $j=1,\dots n$,

$f_0 \in \mathcal{L}^{q_0,\lambda_0(n+2\alpha)}(\Omega, R^N)$ ove q_0 e λ_0 sono definiti, rispettivamente, come negli enunciati dei teoremi 4.11 e 4.14.

Allora $u \in C^{1,\alpha}(\Omega, R^N)$ e per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ si ha

(4.41) $$\sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B(r)}, R^N)} \leq$$

$$\leq c\{ |u|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{\mathcal{L}^{q_0,\lambda_0(n+2\alpha)}} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{\mathcal{L}^{2,n+2\alpha}} \}$$

OSSERVAZIONE 4.19. I teoremi 4.14, 4.16 e 4.18 si possono generalizzare al caso di derivate di ordine superiore supponendo $u \in H^m(\Omega, R^N)$, $m>1$, e in opportune ipotesi sul secondo dell' equazione (4.40) e sulla differenziabilità dei coef= ficienti A_{ij}. Per tali generalizzazioni si rinvia ai teoremi 4.II, 5.II e 6.II del cap. 2 di [Q].

OSSERVAZIONE 4.20. In questo paragrafo abbiamo studiato la regolarità di si= stemi ellittici ridotti alla parte principale

$$E_0 u = - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij} D_j u) = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$$

Se, invece, si considera il sistema più generale

$$Eu = - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij} D_j u + A_i u) + (\sum_{j=1}^{n} B_j D_j u + Cu) = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j = F$$

allora si può scrivere

$$E_0 u = - \sum_{j=1}^{n} D_j (f_j - A_i u) + (f - \sum_{j=1}^{n} B_j D_j u - Cu)$$

e quindi il sistema $Eu = F$ rientra come caso particolare nei sistemi quasi lineari con parte principale lineare.

c) Sistemi ellittici a coefficienti holderiani. Regolarità L^p.

Premettiamo un teorema di interpolazione di Stampacchia.

TEOREMA 4.21 ([26]). Sia Q un cubo limitato di R^n. Se T è un' applicazione lineare $L^\infty(\Omega,R^N) \to \mathcal{L}^{1,n}(Q,R^N)$ e $L^{p_1}(Q,R^N) \to L^{q_1}(Q,R^N)$, $1\leq p_1 \leq q_1 \leq +\infty$ si hanno le maggiorazioni

$$(4.42) \quad |\|Tu\|| _{\mathcal{L}^{1,n}(Q,R^N)} \leq M_\infty \|u\|_{L^\infty(\Omega,R^N)} \qquad \text{per ogni } u\in L^\infty(\Omega,R^N)$$

$$(4.43) \quad \|Tu\|_{L^{q_1}(Q,R^N)} \leq M_1 \|u\|_{L^{p_1}(\Omega,R^N)} \qquad \text{per ogni } u\in L^{p_1}(\Omega,R^N)$$

allora T è un' applicazione lineare e continua $L^p(\Omega,R^N) \to L^q(\Omega,R^N)$ per ogni p, q tali che

$$(4.44) \quad 1 \leq \frac{p}{p_1} = \frac{q}{q_1} \leq +\infty$$

e si ha la maggiorazione

$$(4.45) \quad \|Tu\|_{L^q(\Omega,R^N)} \leq K \|u\|_{L^p(\Omega,R^N)} \qquad \text{per ogni } u\in L^p(\Omega,R^N)$$

ove $K = C\, M_\infty^{1-p_1/p} M_1^{p_1/p} + M_1 (\text{mis } Q)^{1/q - 1/q_1} (\text{mis } \Omega)^{1/p_1 - 1/p}$

e $C = C(n,p,q,p_1,q_1)$.

Siano $F = -\sum_{j=1}^n D_j f_j$, $f_j \in L^2(\Omega,R^N)$, $A_{ij} \in C^{0,\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $\varepsilon>0$. Per il teorema 4.11 esiste r_0 tale che per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ con $r\leq r_0$, esiste una ed una sola $w\in H^1_0(\Omega,R^N)$ soluzione variazionale in $B(r)$ del sistema ellittico $E_0 w = F$ e si ha la maggiorazione

$$(4.46) \quad |w|_{H^1(B(r))} \leq c(r) \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^2(B(r))}$$

LEMMA 4.22. Se $B(r) \subset \Omega$ con $r\leq r_0$ e $f_j \in L^p(\Omega,R^N)$ per ogni $j=1,\dots n$, $p\geq 2$, la soluzione variazionale $w\in H^1_0(B(r),R^N)$ del sistema $E_0 w = F$ in $B(r)$ appartiene a $H^{1,p}_{loc}(B(r),R^N)$ e per ogni $\rho<r$ e si ha

$$(4.47) \quad \sum_{j=1}^n \|D_j w\|_{L^p(B(\rho))} \leq c \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(B(r))}$$

Dimostrazione. Dalla (4.33) risulta

$$(4.48) \qquad |w|_{H^1(B(r))} \leqslant c(r) \sum_{j=0}^{n} \|f_j\|_{L^2(B(r))}$$

Se $f_j \in L^\infty(\Omega, R^N)$ per ogni j=0,1...n per il teorema 4.21 risulta

$$(4.49) \qquad \sum_{j=1}^{n} \|D_j w\|_{\mathcal{L}^{2,n}(B(\rho),R^N)} \leqslant c\{|w|_{H^1(B(r))} + \sum_{j=0}^{n} \|f_j\|_{L^\infty(B(r))}\}$$

da cui

$$(4.50) \qquad \sum_{j=1}^{n} \|D_j w\|_{\mathcal{L}^{2,n}(B(\rho),R^N)} \leqslant c(r) \sum_{j=0}^{n} \|f_j\|_{L^\infty(B(r))}$$

Sia $w_j \in H^1_o(B(r), R^N)$, j=1,...n la soluzione dell' equazione

$$E_o w_j = - \partial_j f_j .$$

Essendo E_o un operatore lineare, posto $w = \sum_{j=1}^{n} w_j$, w è la soluzione della equazione

$$E_o w = F.$$

Dalle maggiorazioni (4.48) e (4.50) segue che l' applicazione

$T_{ij}: f_j \to D_i f_j$, i=1,...n, j=0,1,...n è lineare e continua. Inoltre si hanno le immersioni continue

$$L^2(B(r),R^N) \to L^2(B(\rho),R^N)$$

$$L^\infty(B(r),R^N) \to \mathcal{L}^{2,n}(B(\rho),R^N)$$

per ogni $\rho \leqslant r$. Applicando il teorema di interpolazione di Stampaccia segue

$$T_{ij}: L^p(B(r),R^N) \to L^p(B(r),R^N)$$

ed inoltre

$$\|D_i w_j\|_{L^p(B(\rho))} \leqslant c \|f_j\|_{L^p(B(r))}$$

o, equivalentemente

$$|w|_{H^{1,p}(B(\rho))} \leqslant c \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(B(r))} \qquad \square$$

TEOREMA 4.23. Se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione variazionale del sistema ellittico

$E_o u = -\sum_{j=1}^{n} D_j f_j$ con $f_j \in L^p(\Omega, R^N)$, $j=1,\dots n$, $p \geq 2$ e $A_{ij} \in C^{o,\varepsilon}(\overline{\Omega}, R^N)$, $\varepsilon \in (0,1)$, allora $u \in H^{1,p}_{loc}(\Omega, R^N)$ e per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$

$$(4.51) \qquad \| u\|_{H^{1,p}(B(r))} \leqslant c' \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(\Omega)} \}$$

Dimostrazione. Sia $B(r) \subset\subset \Omega$ con $r \leqslant r_o$. Sia $w \in H^1_o(B(r), R^N)$ soluzione variazionale in $B(r)$ del sistema $E_o w = -\sum_{j=1}^{n} D_j f_j$. Per il lemma 4.22, $w \in H^{1,p}_{loc}(B(r), R^N)$ e per ogni $\rho < r$ si ha

$$(4.52) \qquad \|w\|_{H^{1,p}(B(\rho))} \leqslant c \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(B(r))}$$

Sia $v \in H^1(B(r), R^N)$ tale che $u=v+w$ e v sia soluzione in $B(r)$ del sistema $E_o v=0$ e quindi, per il teorema 6.18, si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|_{C^{o,\alpha}(\overline{B(\rho)})} \leqslant c \|v\|_{H^1(B(r))}$$

In particolare $v \in H^{1,p}(B(\rho), R^N)$ e

$$(4.53) \qquad \sum_{j=1}^{n} \|D_j v\|_{L^p(B(\rho))} \leqslant c \|v\|_{H^1(B(r))}$$

Essendo $w \in H^1_o(\Omega, R^N)$, dalle maggiorazioni (4.47),(4.52),(4.53) e dalla disuguaglianza di Poincarè segue

$$\sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|_{L^p(B(\rho))} \leqslant c \sum_{j=1}^{n}{}' \{ \|D_j v\|_{L^p(B(\rho))} + \|D_j w\|_{L^p(B(\rho))} \} \leqslant$$

$$\leqslant c \{ \|v\|_{H^1(B(r))} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(B(r))} \} \leqslant$$

$$\leqslant c' \{ \|u\|_{H^1(B(r))} + \|w\|_{H^1(B(r))} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(B(r))} \} \leqslant$$

$$\leqslant c \{ \|u\|_{H^1(B(r))} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(B(r))} \}$$

Ogni sfera $B(\rho) \subset\subset \Omega$ si può ricoprire con un numero finito di sfere aventi raggio $< r_o$ e quindi segue la tesi. □

d) Sistemi fortemente ellittici a coefficienti L^{∞}. Regolarità negli spazi $L^{2,\lambda}$ ed holderianità delle soluzioni.

Sia Ω un aperto limitato di R^n e consideriamo il sistema lineare ridotto alla parte principale

(4.54) $E_o u = - \sum_{i,j=1}^{n} D_i (A_{ij} D_j u) = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$

ove $f \in L^{q_o}(\Omega)$, $f_j \in L^2(\Omega)$ per ogni $j=1,\ldots n$ essendo q_o definito come nell' enunciato del teorema 4.11 ed inoltre $A_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ per ogni $i,j=1,\ldots n$. Supponiamo che il sistema sia fortemente ellittico, cioè esista $\nu>0$ tale che

(4.55) $\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij} \xi^j \mid \xi^i) \geqslant \nu \sum_{j=1}^{n} \|\xi^j\|^2$

per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni sistema $\{\xi^j\}_{j=1,\ldots n}$ di vettori di R^n.

Essendo $A_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, l' esistenza e l' unicità di soluzioni variazionali $u \in H^1_o(\Omega, R^N)$ si provano grazie alla condizione (4.55) e al teorema di Lax Milgram.

In generale se $f \in L^{q_o, \lambda_o(\lambda)}(\Omega, R^N)$ e $f_j \in L^2(\Omega, R^N)$ ove λ_o è definito come nel teorema 4.14 proviamo

(4.56) $D_j u \in L^{2,\lambda}_{loc}(\Omega, R^N)$ per ogni $j=1,\ldots n$

ove $\lambda < \lambda_o$ con λ_o opportuno.

Dal teorema 3.10 segue $u \in \mathcal{L}^{2,2+\lambda}(\Omega, R^N)$ da cui, se $n=2$, segue

(4.57) $u \in C^{o,\delta}(\Omega, R^N)$ ove $\delta = \lambda/2$.

Se $n>2$ e $N>1$ in generale non si può ottenere l' holderianità globale della soluzione, come mostra il seguente controesempio di De Giorgi per il cui riferimento rinviamo a [Q]. Se, invece, $n>2$ e $N=1$ in [16] è provato che se $E_o u=0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $u \in C^{o,\delta}(\Omega)$ con δ opportuno.

CONTROESEMPIO.

Siano $n=N\geqslant 3$ e Ω un aperto limitato di R^n che contiene 0.

Siano

$$B^h_i(x) = (n-2)\, \delta_{ih} + n\, x_i\, x_h \,/\, \|x\|^2$$

$A_{ij}^{hk}(x) = B_i^h(x)\, B_j^k(x)$ e $A_{ij} = \{A_{ij}^{hk}\}$

$I = \{\delta_{hk}\}$ è la matrice identica di ordine n.

Consideriamo il sistema

$$(4.58) \qquad E_o u = \sum_{ij} D_i(\mathbf{A}_{ij} D_j u) = 0$$

ove $\qquad \mathbf{A}_{ij} = A_{ij} + \delta_{ij} I.$

Quindi $\mathbf{A}_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ e il sistema è fortemente ellittico in quanto per ogni sistema $\{\xi^i\}_{i=1,\dots n}$ di vettori di R^N si ha

$$\sum_{ij}(A_{ij}\,\xi^j \mid \xi^i) + \sum_i(\xi^i \mid \xi^i) = [\sum_{i,h=1}^n B_i^h\, \xi_h^i]^2 + \sum_i \|\xi_i\|^2 \geq \sum_i \|\xi_i\|^2$$

Tuttavia, definendo

$$u(x) = x/\|x\|^\alpha \qquad \text{e } \alpha = n\{1 - [(2n-2)^2+1]^{-\frac{1}{2}}\}/2$$

risulta $u \in H^1(\Omega, R^N)$ ed è soluzione variazionale del sistema (4.57), mentre non è nè continuo, nè limitato in un intorno dell' origine.

Proviamo un lemmma di carattere generale. A tal scopo introduciamo alcune notazioni.

<u>DEFINIZIONE 4.24.</u>Consideriamo uno spazio di Hilbert reale H e un operatore lineare e continuo $A : H \to H$ (ossia $A \in \mathcal{L}(H,H)$); indicato con A^* l' operatore trasposto, poniamo

$$(4.59) \qquad A^+ = (A + A^*)/2$$

$$(4.60) \qquad A^- = (A - A^*)/2$$

Gli operatori lineari definiti in (4.59) e in (4.60) vengono detti, rispettivamente, parte simmetrica e parte antisimmetrica dell' operatore A.

Dalla continuità dell' operatore A segue che esistono due costanti M e M_- tali che

$$(4.61) \qquad \|Ax\| \leq M\,\|x\| \qquad \text{per ogni } x \in H$$

$$(4.62) \qquad \|A^- x\| \leq M_-\,\|x\| \qquad \text{per ogni } x \in H.$$

Supponiamo che l' operatore A sia coercivo, ovvero esista una costante $\nu > 0$ tale che

(4.63) $(Ax \mid x) \geq \nu \|x\|^2$ per ogni $x \in H$.

Inoltre per ogni $\lambda \geq 0$, definiamo

(4.64) $K(\lambda) = (M - \nu + \lambda^2 + M_-^2)/(M+\lambda)$

LEMMA 4.25 (lemma di avvicinamento). Siano H uno spazio di Hilbert reale e $A \in \mathcal{L}(H,H)$ un operatore lineare verificante l' ipotesi (4.63). Allora, con le notazioni sopra introdotte e definito $K(\lambda)$ come in (4.64) per ogni $x \in H$ si ha la maggiorazione

(4.65) $\|(M+\lambda)x - Ax\| \leq (M+\lambda)K(\lambda)\|x\|$

In particolare

(4.66) $K(\lambda)<1$ se $\lambda > (M_-^2 - \nu^2)/(2\nu)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi: H \times H \to R$ definita da

(4.66) $\varphi(x,y) = (A^+ x \mid y)$.

Essendo A^+ un operatore lineare, continuo e simmetrico, φ risulta una forma bilineare e definita positiva. Pertanto, dalla diseguaglianza di Schwartz segue

(4.67) $|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\ \varphi(y,y)$

Per ogni $x \in H$ si ha

(4.68) $\|(M+\lambda) - Ax\| \leq \|Mx - A^+x\| + \|\lambda x - A^- x\|$.

Pertanto dalle maggiorazioni (4.66),(4.67),(4.68) e dalle ipotesi (4.62) e (4.63), con facili calcoli, segue la diseguaglianza (4.65).

Inoltre se $\lambda > (M_-^2 - \nu^2)/(2\nu)$ si verifica immediatamente $K(\lambda)<1$. □

LEMMA 4.26. Siano A_{ij}, $i,j=1,\dots n$ matrici NxN che soddisfano la condizione (4.55). Allora, posto

$$M = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\lambda>0$ e per ogni sistema $\{\xi^i\}_{i=1,\dots n}$ di vettori di R^N risulta

$$(4.69)\quad \sum_{i=1}^{n}\|(M+\lambda)\xi^i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\xi^j\|^2 \leqslant \left(M-\nu+\sqrt{\lambda^2+M_-^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\|\xi^i\|^2$$

Dimostrazione. Definendo

$$\bar{A}_{ij} = (A_{ij} - A^*_{ji})/2 \qquad i,j=1,\dots N$$

ed inoltre

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \|\bar{A}_{ij}\|^2 \leqslant M_-^2$$

segue $M_- \leqslant M$, da cui, applicando il lemma (4.26) segue la tesi.

Il lemma 4.25 è di fondamentale importanza nello studio della regolarità di soluzioni di sistemi ellittici (e parabolici), come è evidenziato dal lemma seguente. □

LEMMA 4.27. Se $u\in H^1(\Omega,R^N)$ è soluzione variazionale del sistema $E_o u = 0$, per ogni $\lambda>0$, per ogni sfera,; $B(r)\subset\subset\Omega$ e per ogni $t\in(0,1)$ si ha

$$(4.69)\quad \sum_{j=1}^{n}\|D_j u\|^2_{L^2(B(tr))} \leqslant\{(1+K)t^{n/2} + K\}\sum_{j=1}^{n}\|D_j u\|^2_{L^2(r))}$$

ove K è definito come in (4.64) e in particolare $K=(1-\nu/M)$ se $A_{ij} = A_{ji}$.

Dimostrazione. In $B(r)$ scriviamo $u=v+w$ dove $w\in H^1_o(B(r),R^N)$ è soluzione, in $B(r)$, del sistema fortemente ellittico

$$(M+\lambda)\,\Delta w = (M+\lambda)\,\Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}D_j u) = F(u).$$

Poichè $F(u)\in H^{-1}(B(r),R^N)$ per il teorema di Lax Milgram w esiste unico e si ha

$$(4.70)\quad \sum_{j=1}^{n}\|D_j w\|^2_{L^2(B(r))} \leqslant (M+\lambda)^{-1}\|F(u)\|_{H^{-1}(B(r))}$$

Con facili calcoli dal lemma 4.26 segue

$$(4.71)\quad \sum_{j=1}^{n}\|D_j w\|^2_{L^2(B(r))} \leqslant K(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\|D_j u\|^2_{L^2(B(r))}$$

ove $K(\lambda)$ è definito come in (4.64). Per il teorema 4.9 segue

$$(4.72)\quad \sum_{j=1}^{n}\|D_j v\|^2_{L^2(B(r))} \leqslant c\, t^{n/2}\sum_{j=1}^{n}\|D_j v\|^2_{L^2(B(r))}$$

Inoltre in [17] è provato che si può prendere $c=1$.

Pertanto dalle (4.71) e (4.72) segue la (4.69). □

Premettiamo un ulteriore lemmma algebrico.

LEMMA 4.28 ([Q]). Sia φ una funzione non negativa e non decrescente su $(0,d]$, sia $\alpha>0$ e sia $k\in(0,1)$. Supponiamo che per ogni $t\in(0,1)$ e per ogni $r\in(0,d]$

$$(4.73)\qquad \varphi(tr) \leq \{(1+k)\,t^{\alpha} + k\}\,\varphi(r)$$

Allora per ogni $t\in(0,1)$ e per ogni $r\in(0,d]$

$$(4.74)\qquad \varphi(tr) \leq c\,t^{\varepsilon\alpha}\,\varphi(r)$$

dove

$$\varepsilon = \sup_{0<t<(1-k)/(1+k)} \log\,[\,(1+k)t + k]\ /\ \log t$$

e $\qquad c = (1-\varepsilon)/k.$

Il teorema che segue rappresenta l' analogo del lemma 4.13 nel caso in cui i coefficienti non siano continui in $\bar{\Omega}$, ma risulti solamente $A_{ij}\in L^{\infty}(\Omega)$.

TEOREMA 4.29. Se $u\in H^1(\Omega,R^N)$ è soluzione distribuzione del sistema fortemente ellittico $E_o u=0$ esiste $\varepsilon(\nu/M)\in(0,1)$ tale che per ogni sfera $B(r)\subset\Omega$ e per ogni $t\in(0,1)$

$$(4.75)\qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leq c\,t^{\varepsilon n}\,|u|^2_{H^1(B(r))}$$

Dimostrazione. Se nella (4.67) si sceglie $\lambda=(M^2-\nu^2)/\nu$ segue $k<1$ e pertanto dal lemma precedente si conclude. □

Analogamente a quanto provato nel caso dei coefficienti continui, dal teorema 4.29, si prova, per le derivate prime, un teorema di regolarità negli spazi $L^{2,\lambda}_{loc}(\Omega,R^N)$.

TEOREMA 4.30. Se $u\in H^1(\Omega,R^N)$ è soluzione variazionale del sistema fortemente ellittico

$$(4.76)\qquad E_o u = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$$

con $A_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $f \in L^{q_o,\lambda_o}(\Omega, R^N)$ e $f_j \in L^{2,\lambda}(\Omega, R^N)$ per ogni $j=1,\dots n$ e se $\lambda \in [0, \varepsilon n)$ (ove ε è definito come nel teorema 4.29), allora per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ si ha

$$(4.77) \qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, r^{\lambda} \{ |u|^2_{H^1(\Omega)} + \|f\|^2_{L^{q_o,\lambda_o}(\Omega,R^N)} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega,R^N)} \}$$

In particolare se $n=2$ $u \in C^{o,\lambda/2}(\Omega, R^N)$ e si ha

$$(4.78) \qquad \|u\|_{C^{o,\lambda/2}(\overline{B(r)},R^N)} \leqslant c\, \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^{q_o,\lambda_o}(\Omega,R^n)} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega,R^N)} \}$$

<u>TEOREMA 4.31 ([15]).</u> Se $n \geqslant 2$, $N=1$ e $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione variazionale della equazione ellittica $E_o u=0$, esiste $\lambda_o \in (n-2,n)$ tale che per ogni sfera $B(r) \subset \Omega$ e per ogni $t \in (0,1)$

$$(4.79) \qquad |u|^2_{H^1(B(tr))} \leqslant c\, t^{\lambda_o} |u|^2_{H^1(B(r))}$$

Osserviamo che in generale risulta $\lambda_o > n$ e quindi, nel caso $n \geqslant 2$ e $N=1$ il teorema di De Giorgi migliora il teorema 4.30.

Concludiamo il paragrafo con un teorema di regolarità holderiana per u, per la cui dimostrazione si procede anaolgamente al teorema 4.30, basandosi sul teorema 4.31 anzichè sul teorema 4.29.

<u>TEOREMA 4.32</u>. Se $n>2$, $N=1$ e $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione variazionale dell' equazione ellittica $E_o u = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$ con $f_j \in L^{2,\lambda}(\Omega)$, $j=1,\dots,n$, $f \in L^{2n/(n+2),\lambda n/(n+2)}(\Omega)$, allora $D_i u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ e per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^{2,\lambda}(B(r))} \leqslant c\, \{ |u|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{2,\lambda}(\Omega)} + \|f\|_{L^{2n/(n+2),\lambda_o n/(n+2)}(\Omega)} \}$$

In particolare se $\lambda \in (n-2, \lambda_o)$, $u \in C^{o,\delta}(\Omega)$ ove $\delta = 1-(n-\lambda)/2$ e per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ si ottiene

$$\|u\|_{C^{o,\delta}(\overline{B(r)})} \leqslant c\, \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{2,\lambda}(\Omega)} + \|f\|_{L^{2n/(n+2),\lambda_o n/(n+2)}(\Omega)} \}.$$

e) Sistemi fortemente ellittici E_o a coefficienti L^∞. Regolarità L^p.

Supponiamo che il sistema

$$(4.80)\qquad E_o u = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}D_j u) = f - \sum_{j=1}^{n} D_j f_j$$

sia uniformemente ellittico e a coefficienti $L^\infty(\Omega)$. Proviamo un teorema di regolarità L^p il cui schema di dimostrazione verrà ripreso nello studio dei sistemi non lineari.

Premettiamo un lemma dovuto a Gehring - Giaquinta - G.Modica per la cui di= mostrazione rinviamo a [16].

LEMMA 4.33. Se U e G sono funzioni non negative, definite su un aperto limi= tato $\Omega_o \subset R^n$ e

$$U \in L^q(\Omega_o) \qquad G \in L^s(\Omega_o) \qquad \text{con } 1 < q < s$$

ed inoltre, per ogni $B(r) \subset B(2r) \subset \Omega_o$

$$\int_{B(r)} U^q\,dx \leqslant c\left(\int_{B(2r)} U\,dx\right)^q + \int_{B(2r)} G^q\,dx + \lambda\int_{B(2r)} U^q\,dx$$

allora esiste $\lambda_o(q,s)$ tale che per ogni $\lambda<\lambda_o$ esiste $\varepsilon>0$, dipendente da c, q e s, tale che $U \in L^t_{loc}(\Omega_o)$ per ogni $t \in [q, q+\varepsilon)$ e

$$(4.81)\quad \left(\int_{B(r)} U^t\,dx\right)^{1/t} \leqslant K\left\{\left(\int_{B(2r)} U^q\,dx\right)^{1/q} + \left(\int_{B(2r)} G^t\,dx\right)^{1/t}\right\}$$

TEOREMA 4.34. Se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione variazionale del sistema $E_o u = -\sum_{j=1}^{n} D_j f_j$ con $f_j \in L^p(\Omega, R^N)$ e $2 \leqslant p < 2+\varepsilon q$ ove $q = 2n/(n+2)$ allora $D_j u \in L^p_{loc}(\Omega, R^N)$ per ogni $j=1,\ldots n$ e per ogni sfera $B(r) \subset B(2r) \subset \Omega$ si ha

$$(4.82)\quad |u|_{H^{1,p}(B(r))} \leqslant c\left\{\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^p(B(2r))} + r^{n/p - n/2}|u|_{H^1(B(2r))}\right\}.$$

Dimostrazione. Sia $u \in H^1(\Omega, R^N)$ soluzione variazionale del sistema

$$E_o u = -\sum_{j=1}^{n} D_j f_j \qquad \text{con } f_j \in L^p(\Omega, R^N) \text{ e } p>2.$$

Sia $B(r) \subset B(2r) \subset \Omega$. Per il teorema 4.7 si ha

$$(4.83)\quad |u|^2_{H^1(B(r))} \leqslant c_1 r^{-2}\|u - u_{B(2r)}\|^2_{L^2(B(2r))} + c_2\int_{B(2r)}\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|^2\,dx$$

con c_1 e c_2 stabili. Posto $q=2n/(n+2)$, dalla diseguaglianza di Poincarè si ottiene

$$(4.84)\qquad \|u - u_{B(2r)}\|^2_{L^2(B(2r))} \leqslant c_3 \, |u|^2_{H^{1,q}(B(2r))}$$

con c_3 stabile.

Dalle (4.83) e (4.84) segue

$$(4.85)\qquad |u|^2_{H^1(B(2r))} \leqslant c\, r^{-2} |u|^2_{H^{1,q}(B(2r))} + c \int_{B(2r)} \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2 \, dx$$

Posto

$$U = \sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|^{2\; q/2}$$

$$G = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^{2\; q/2}$$

dal lemma 4.33 segue che per ogni $p=qt\epsilon[\,2+\varepsilon q)$ si ha

$$|u|_{H^{1,p}(B(r))} \leqslant c \left\{ r^{n/p - n/2} |u|_{H^1(B(2r))} + \left[\int_{B(2r)} \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p} \right\}$$

Se u è soluzione variazionale del sistema $E_o u=-\sum_{j=1}^{n} D_j f_j$ con $f_j \epsilon L^p(\Omega, R^N)$, $p\epsilon[\,2,2+\varepsilon q)$ dal lemma 4.33 si conclude

$$|u|_{H^{1,p}(B(r))} \leqslant c \left\{ r^{n/p - n/2} |u|_{H^1(B(2r))} + \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^p(B(2r))} \right\} . \qquad \square$$

f) Applicazioni dei risultati precedenti ai sistemi quasi lineari con parte principale lineare.

In questo paragrafo studiamo la regolarità dei sistemi ellittici quasi lineari con parte principale lineare (come si è già notato i sistemi lineari non ridotti alla parte principale possono essere visti come un caso particolare di sistemi quasi lineari a parte principale lineare).

Consideriamo il sistema

$$(4.86)\qquad -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}(x)D_j u) = -\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u) + a^o(x,u,Du).$$

Supponiami che i coefficienti A_{ij} siano continui in $\overline{\Omega}$ e il sistema sia ellittico in $\overline{\Omega}$. Inoltre i vettori a^i, $i=0,1,\dots n$ siano misurabili in x, continui in (u,p), e ad andamenti strettamente controllati, ossia

$$(4.87)\qquad \|a^i(x,u)\| \leq f_i(x) + c\,\|u\|^{\alpha}$$

$$(4.88)\qquad \|a^o(x,u,p)\| \leq f_o(x) + c\,(\|u\|^{\beta} + \|p\|^{\gamma})$$

ove α, β, γ soddisfano le condizioni della definizione 1.9 (con q=2) ed inoltre, se $n>2$, tali diseguaglianze siano verificate strettamente. Per ogni $\lambda\in[0,n)$ siano $f_i\in L^{2,\lambda}(\Omega,R^N)$ per ogni $i=1,\dots n$ e $f_o\in L^{q_o,\lambda_o(\lambda)}(\Omega,R^N)$ ove q_o e $\lambda_o(\lambda)$ sono definiti, rispettivamente, come negli enunciati dei teoremi 4.11 e 4.14.

Allora, nelle ipotesi considerate, con un procedimento già introdotto nel lavoro [3], si prova che esistono due costanti positive, μ e μ_o tali che

$$a^i(.,u)\in L^{2,\lambda\wedge\mu}(\Omega,R^N)$$

$$a^o(.,u,Du)\in L^{q_o,\lambda_o\wedge\mu_o}(\Omega,R^N)$$

Pertanto, applicando ripetutamente il teorema 4.14, si dimostra

$$D_j u\in L^{2,\lambda}_{loc}(\Omega,R^N) \text{ per ogni } j=1,\dots n.$$

Inoltre per ogni aperto $\Omega_o \subset\subset \Omega$ vale la maggiorazione (4.33).

Analogamente si ottiene la regolarità nello spazio limite $\mathcal{L}^{2,n}(\Omega,R^N)$ e negli spazi holderiani $\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega,R^N)$ con $\lambda\in(n,n+2)$.

Come si è già osservato, le dimostrazioni di quanto sopra si basano su un proce= dimento iterativo introdotto per la prima volta in [3] nello studio della rego= larità delle derivate $D^{\alpha}u$ con $|\alpha|=k$ e $u\in H^{k}(\Omega)$, $k\geqslant 2$.

Se, invece, $A_{ij}\in L^{\infty}(\Omega)$ e E_{o} è fortemente ellittico, grazie ai risultati provati per i sistemi lineari, si dimostra che se gli andamenti sono stretttamente controllati, allora sussiste un risultato di regolarità, negli spazi di Morrey, per le derivate prime $D_{j}u$, $j=1,\dots n$, nel caso in cui risulti $n=2$ o $N=1$, mentre, nel caso generale occorre imporre l' ulteriore limitazione $(\nu/M)\sim 1$ ove M è definito come nell' enunciato del lemmma 4.26.

Per brevità, per la regolarità L^{p} e per i dettagli tecnici di quanto sopra esposto, rinviamo a [Q].

CAPITOLO V

SISTEMI ELLITTICI NON LINEARI

i) caso $a^i = a^i(Du)$

Consideriamo il sistema base fortemente ellittico

$$(5.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i a^i(Du) = 0$$

ove $a^i(p)$ sono vettori di R^n di classe C^1 verificanti le seguenti condizioni

$$(5.2) \qquad \begin{aligned} &\| a^i(p) \| \leqslant V(p) \qquad\qquad \text{ove } V(p)=(1+\|p\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i(p)}{\partial p_k^j} \right\| \leqslant M \end{aligned}$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre $a^i(0)=0$.

a) differenziabilità

TEOREMA 5.1. Se $u \in H^1(\Omega,R^N)$ è soluzione del sistema (5.1), nelle ipotesi (5.2), allora

$$u \in H^2_{loc}(\Omega,R^N)$$

Inoltre si ha la maggiorazione

$$(5.3) \qquad |u|_{H^2(B(\rho))} \leqslant |u|_{H^1(B(r))}$$

ove c è una costante dipendente da ν, M, $(r-\rho)$, che diverge per $\rho \to r$, ρ e r sono tali che $r>\rho$ e $B(r) \subset \Omega$.

Dimostrazione. Sia $B(r)=B(x_o,r) \subset \Omega$ e sia $\rho \in (o,r)$. Sia s tale che $1 \leqslant s \leqslant n$ e $\tau_{s,t}$ come in (4.2) ove $|t|<(r-\rho)/4$.

Sia $\vartheta \in C_o^\infty(R^n)$ tale che $o \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $\vartheta=1$ su $B(\rho)$ e $\vartheta=0$ in $R^n \setminus B(r_o)$ ove $r_o=(\rho+r)/2$.

Consideriamo $\varphi= \tau_{s,-t}(\vartheta^2 \tau_{s,t}u)$.

Quindi risulta

$$(5.4) \qquad \int_{B(r)} \Sigma_i (\tau_{s,t}\, a^i(Du) | \; D_i (\vartheta^2 \tau_{s,t}u)) \, dx = 0.$$

Posto

$$\tilde{a}^i(x) = \int_o^1 a^i(Du(x)+ht\tau_{s,t}Du(x)) \, dh$$

svolgendo i calcoli si prova

$$\tau_{s,t} a^i(Du) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \tau_{s,t} D_j u_k \frac{\partial \tilde{a}^i}{\partial p_k^j}$$

Pertanto risulta

$$(5.5) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{B(r)} (\vartheta \tau_{s,t} D_j u_k \frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} | \vartheta \tau_{s,t} D_j u) \, dx =$$

$$= -2 \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{B(r)} (\vartheta \tau_{s,t} D_j u_k \frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} | D_i \vartheta \tau_{s,t} u) \, dx$$

Per l' ipotesi di forte ellitticità segue

$$(5.6) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \int_{B(r)} (\vartheta \tau_{s,t} D_j u_k \frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} | \vartheta \tau_{s,t} D_i u) \, dx \geq \nu \int_{B(r)} \vartheta^2 \sum_{i=1}^{n} \| \tau_{s,t} D_i u \|^2 \, dx .$$

Dalle ipotesi (5.2), indicato con I il secondo membro della (5.5) si ha

$$|I| \leq c(M,\rho,r) \sum_{j=1}^{n} \int_{B(r)} \vartheta \| D_j u \| \, \| \tau_{s,t} u \| \, dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \int_{B(r)} \vartheta^2 \| \tau_{s,t} D_j u \|^2 \, dx + c(M,\rho,r,\varepsilon) \int_{B(r_o)} \| \tau_{s,t} u \|^2 \, dx$$

Per il lemma 4.1 si ha

$$\int_{B(r_o)} \| \tau_{s,t} u \|^2 \, dx \leq \int_{B(r)} \| D_i u \|^2 \, dx .$$

Pertanto scelto $\varepsilon = \nu/2$ segue

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{B(\rho)} \| \tau_{s,t} D_j u \|^2 \, dx \leq c(M,\rho,r,\varepsilon,\nu) \int_{B(r)} \| D_i u \|^2 dx$$

Per il teorema 4.2 e l' arbitrarietà di s, segue $u \in H^2(B(\rho), R^N)$ e vale la maggiorazione

$$|u|_{H^2(B(\rho))} \leq c \, |u|_{H^1(Br))}$$

□

Il seguente teorema dà una generalizzazione del teorema precedente

<u>TEOREMA 5.2.</u> Se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è una soluzione del sistema (5.1) nelle ipotesi (5.2) allora

$$u \in H^2_{loc}(\Omega, R^N)$$

ed inoltre per ogni $B(2r) \subset\subset \Omega$ e per ogni vettore-polinomio di grado ≤ 1

$$(5.7)\qquad \int_{B(r)} \|D_s Du\|^2\,dx \leqslant cr^{-2}\int_{B(2r)} \|D_s(u-P)\|^2\,dx \qquad \text{per ogni } s=1,\dots n$$

ove c non dipende da r.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente quando si consideri

$$\varphi = \tau_{s,t}(\vartheta^2\tau_{s,t}(u-P))$$

ove ϑ è definita come nella dimostrazione del teorema 5.1. □

b) holderianità della soluzione

LEMMA 5.3. Se $v\in H^1(B(r),\, R^N)$ allora

$$(5.8)\qquad \int_{B(r)} \|v-v_{B(r)}\|^2\,dx \leqslant c(n)\left(\int_{B(r)} \|Dv\|^{2n/(n+2)}\,dx\right)^{(n+2)/n}$$

Dimostrazione. Essendo $2=(2n/(n+2))^*$ la maggiorazione (5.8) segue dalla dise= guaglianza di Poincarè. □

TEOREMA 5.4 Se $u\in H^1(\Omega,\, R^N)$ è soluzione del sistema (5.1) nelle ipotesi (5.2) allora esiste $p>1$ tale che

$$(5.9)\qquad D_j u \in H^{1,2p}_{loc}(\Omega,\, R^N) \qquad \text{per ogni } j=1,\dots n.$$

Per ogni sfera $B(2r)\subset\subset\Omega$ si ha

$$(5.10)\qquad \left(\int_{B(r)}' \{\sum_{s=1}^n \|D_s Du\|^2\}^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant cr^{n(\frac{1}{p}-1)}\int_{B(2r)} \sum_{s=1}^n \|D_s Du\|^2\,dx.$$

In particolare

$$(5.11)\qquad D_j u \in \begin{cases} L_{loc}(\Omega,\, R^N) & \text{se } n=2 \\ L^{2pn/(n-2p)}_{loc}(\Omega,\, R^N) & \text{se } n>2 \end{cases} \qquad \text{per ogni } j=1,\dots n$$

Inoltre

$$(5.12)\qquad u \in \begin{cases} C^{0,1}(\Omega,\, R^N) & \text{se } n=2 \\ C^{0,\lambda}(\Omega,\, R^N) \quad \text{con } \lambda=1-(n-2p)/2p & \text{se } 2<n<4p \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $u\in H^1(\Omega,\, R^N)$ soluzione del sistema (5.1). Per il teorema 5.2 risulta

$$\int_{B(r)} \|D_s Du\|^2\,dx \leqslant cr^{-2}\int_{B(2r)} \|D_s u-(D_s u)_{B(2r)}\|^2\,dx \qquad \text{per ogni } s=1,\dots n.$$

Sostituendo v=Du nel lemma 5.3 segue

$$\sum_{s=1}^{n}\int_{B(r)}\|D_s Du\|^2\,dx \leqslant cr^{-2}\left(\int_{B(2r)}\left(\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2\right)^{n/(n+2)}dx\right)^{(n+2)/n}$$

Dato un aperto $\Omega_o \subset\subset \Omega$ e posto $q=(n+2)/n$ applicando il lemma 4.33 alle funzioni

$$G\equiv 0 \quad \text{e} \quad U=\{\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2\}^{n/(n+2)}$$

si ottiene la maggiorazione (5.10). Applicando il teorema di Sobolev dalla (5.10) segue la (5.11) e successivamente, in modo analogo, dalla (5.11) si deduce la (5.12). □

c) holderianità del gradiente

TEOREMA 5.5. Se $u\in H^1(\Omega, R^N)$ è una soluzione del sistema (5.1) nelle ipotesi (5.2) allora, se p è come nel teorema precedente, per ogni sfera $B(r)\subset\subset\Omega$ e per ogni $t\in(0,1)$ risulta

$$(5.13)\qquad \int_{B(tr)}\|Du-(Du)_{B(tr)}\|^2\,dx \leqslant ct^{2+n(1-\frac{1}{p})}\int_{B(r)}\|Du-(Du)_{B(r)}\|^2\,dx.$$

In particolare se n=2 $u\in C^{1,1-1/p}(\Omega, R^N)$ e se n>2 si ha

$$(5.14)\qquad \int_{B(tr)}\|Du\|^2\,dx \leqslant ct^{2+n(1-1/p)}\int_{B(r)}\|Du\|^2\,dx.$$

Dimostrazione . Applicando la diseguaglianza di Holder dalla (5.10), per ogni $t\in(0,\frac{1}{2}]$ segue

$$(5.15)\qquad \int_{B(tr)}\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2\,dx \leqslant c(tr)^{n(1-1/p)}\left\{\int_{B(tr)}[\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant ct^{n(1-1/p)}\int_{B(r)}\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2\,dx$$

La maggiorazione precedente è ovvia se $t\in(\frac{1}{2},1]$, quindi sussiste per ogni $t\in(0,1)$.

Dalla (5.7) segue

$$(5.16)\qquad \int_{B(r)}\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2\,dx \leqslant cr^{-2}\int_{B(2r)}\|Du-(Du)_{B(2r)}\|^2\,dx.$$

Dal teorema di Poincarè segue

$$(5.17)\qquad \int_{B(tr)}\|Du-(Du)_{B(tr)}\|^2\,dx \leqslant c(tr)^2\int_{B(tr)}\sum_{s=1}^{n}\|D_s Du\|^2\,dx.$$

Dalle maggiorazioni (5.15), (5.16) e (5.17) segue la (5.13).

Se n=2, fissato $r_o \in (o, d\Omega)$, per ogni $r < r_o$, dalla (5.13) segue

$$\int_{B(r)} \| Du-(Du)_{B(r)}\|^2 \, dx \leqslant c \left(\frac{r}{r_o}\right)^{4-2/p} \int_{\Omega} \| Du \|^2 \, dx$$

da cui risulta $Du \in \mathcal{L}^{2,4-2/p}(\Omega, R^N)$ per ogni aperto $\Omega_o \subset\subset \Omega$. Dall' isomorfismo $\mathcal{L}^{2,4-2/p}(\Omega_o, R^N) \cong C^{0,1-1/p}(\bar{\Omega}_o, R^N)$ segue $u \in C^{1,1-1/p}(\Omega, R^N)$.

Se $n>2$ per ogni t, τ verificanti $0<t<\tau<\frac{1}{2}$, posto U=Du, applicando le diseguaglianze di Poincarè e di Holder, otteniamo

$$(5.18) \qquad \int_{B(tr)} \|U\|^2 \, dx \leqslant 2 \int_{B(tr)} \|U-U_{B(2r)}\|^2 \, dx + c(tr)^n \|U_{B(\tau r)}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{t}{\tau}\right)^n \int_{B(\tau r)} \|U\|^2 \, dx + c(\tau r)^2 \int_{B(\tau r)} \sum_{s=1}^{n} \|D_s U\|^2 \, dx$$

Dalle (5.18) e (5.15) si ha

$$(5.19) \qquad \int_{B(tr)} \|U\|^2 \, dx \leqslant c\left(\frac{t}{\tau}\right)^n \int_{B(\tau r)} \|U\|^2 \, dx + c\, \tau^{2+n(1-1/p)}\, r^2 \int_{B(r/2)} \sum_{s=1}^{n} \|D_s U\|^2 \, dx$$

Dalle (5.19) e (5.7), tenendo presente il lemma 4.6, $\forall \;\; 0<t<\tau<\frac{1}{2}$, segue

$$(5.20) \int_{B(tr)} \| U\|^2 \, dx \leqslant c \left\{ \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2+n(1-1/p)} + t^{2+n(1-1/p)} \right\} \int_{B(r)} \| U\|^2 \, dx.$$

La maggiorazione (5.20), per $\tau \to \frac{1}{2}$,diventa

$$(5.21) \qquad \int_{B(tr)} \| U\|^2 \, dx \leqslant c\, t^{2+n(1-1/p)} \int_{B(r)} \| U\|^2 \, dx \qquad \text{per ogni } t \in (0, \tfrac{1}{2}).$$

Essendo la (5.21) ovvia se $t \in [\frac{1}{2}, 1)$, segue la (5.14). □

Diamo ora una dimostrazione alternativa del teorema 5.5.

Si è riportato il procedimento esposto in precedenza in quanto si può ripetere, con alcune complicazioni tecniche, nel caso in cui $u \in H^{1,q}(\Omega, R^N)$, $q>1$ e $2<n<4/(2-q)$ se $q \in (1,2)$. La (5.13) e la (5.14) assumono, in tal caso una forma più complicata in quanto gli integrandi debbono essere moltiplicati per il fattore $(1+\|Du\|)^{q-2}$.

Posto U=Du dalla (5.13) risulta, per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$,

$$(5.22) \qquad \int_{B(tr)} \|U-U_{B(tr)}\|^2 \, dx \leqslant c\, t^{2+n(1-1/p)} \int_{B(r)} \|U-U_{B(r)}\|^2 \, dx$$

da cui

$$\int_{B(tr)} \|U\|^2 dx \leqslant 3 \int_{B(tr)} \|U-U_{B(tr)}\|^2 dx + 3 \text{ mis } (B(tr)) \|U_{B(r)} - U_{B(tr)}\|^2 +$$

$$+ 3 \text{ mis } B(tr)) \|U_{B(r)}\|^2 \leqslant$$

$$c\, t^{2+n(1-1/p)} \int_{B(r)} \|U-U_{B(r)}\|^2 dx + c\, t^n \int_{B(r)} \|U\|^2 dx.$$

Pertanto se $n>2$ segue

$$(5.23) \qquad \int_{B(tr)} \|U\|^2 dx \leqslant c\, t^{2+n(1-1/p)} \int_{B(r)} \|U\|^2 dx$$

per ogni $t \in (0,1)$ e per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$.

Se, invece, $n=2$ dalla (5.22) si ottiene

$$U \in \mathcal{L}^{2,2(1-1/p)}_{loc} (\Omega, R^N)$$

da cui segue

$$u \in C^{1,1-1/p}(\Omega, R^N).$$

□

TEOREMA 5.6. Se $n=2$

(5.24) $\qquad u \in C^{1,\alpha}(\Omega, R^N)$ $\qquad$ per ogni $\alpha \in (0,1)$.

Se $n>2$ e $\dfrac{\partial a^i(p)}{\partial p^j_k}$ sono uniformemente continue in R^{nN}, esiste un sottoinsieme $\Omega_o \subset \Omega$, chiuso in Ω, tale che

(5.25) $\qquad u \in C^{1,\alpha}(\Omega \setminus \Omega_o, R^N)$ $\qquad$ per ogni $\alpha \in (0,1)$

(5.26) $\qquad H_{n-q}(\Omega_o)=0$ $\qquad$ per qualche $q \geqslant 2$.

Se $n \in (2,4]$

(5.27) $\qquad u \in C^{0,\alpha}(\Omega, R^N)$ $\qquad$ $\alpha = \alpha(\nu,M,n)\ (0,1)$.

Dimostrazione. Per il teorema 5.1 risulta $u \in H^2_{loc}(\Omega)$; pertanto derivando rispetto a x_s, $s=1,\dots n$, nella (5.1) segue

(5.28) $\qquad \sum_{i,j} D_j [A_{ij}(Du)\, D_j D_s u] = 0$ $\qquad$ $s=1,\dots n$

ove $A^{hk}_{ij}(p) = \dfrac{\partial a^i(p)}{\partial p^j_k}$. Posto $U=Du$ e introdotte le matrici nN

$$\mathcal{Q}_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \qquad n\text{x}n \text{ blocchi}$$

$U \in H^1_{loc}(\Omega)$ ed è soluzione del sistema quasi-lineare

(5.29) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{ij} (\mathcal{A}_{ij}(U)\, D_j U \mid D_j \varphi)\, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$.

Osserviamo che dalla teoria dei sistemi quasi-lineari ([Q]) si ritrovano le

(5.23) e (5.25).

Inoltre la (5.29) può essere interpretata come un sistema lineare a coefficienti

$\mathcal{A}_{ij}(U) \in L^\infty(\Omega)$. Pertanto, dalla diseguaglianza di Poincarè e dal teorema 4.29,

per ogni $t \in (0,\frac{1}{2})$, e per ogni sfera $B(r) \subset\subset \Omega$, si ottiene

$$\|U-U_{B(tr)}\|^2_{L^2(B(tr))} \leq t^2 r^2 \sum_{j=1}^n \|D_j U\|^2_{L^2(B(tr))} \leq$$

$$\leq c\, t^{2+\varepsilon n} r^2 \sum_{j=1}^n \|D_j U\|^2_{L^2(B(r/2))}$$

da cui, per il teorema di Cacciopoli, segue

(5.30) $$\|U-U_{B(tr)}\|^2_{L^2(B(tr))} \leq c\, t^{2+n} \|U-U_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))} .$$

Se, invece, $t \in [\frac{1}{2},1)$, la (5.30) è ovvia. Infatti se $t \in [\frac{1}{2},1)$, si ha

$$\|U-U_{B(tr)}\|^2_{L^2(B(tr))} \leq \| U-U_{B(r)}\|^2_{L^2(B(tr))} \leq$$

$$\leq \|U-U_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))} \leq 2^{2+\varepsilon n}\, t^{2+\varepsilon n} \| U-U_{B(r)}\|^2_{L^2(B(r))}$$

Quindi, per ogni $t \in (0,1)$ si ha

(5.32) $$\int_{B(tr)} \|U\|^2\, dx \leq c\, t^{2+\varepsilon n} \int_{B(r)} \|U\|^2\, dx.$$

Con un procedimento analogo a quello esposto per provare la (5.31), dalla (5.32)

segue

$$\int_{B(tr)} \| u-u_{B(tr)}\|^2\, dx \leq c\, t^{4+\varepsilon n} \int_{B(r)} \|u-u_{B(r)}\|^2\, dx$$

da cui

$$\int_{B(tr)} \| u-u_{B(tr)}\|^2\, dx \leq c\, t^{4+\varepsilon n} \|u\|^2_{L^2(B(r),\, R^N)} .$$

Pertanto si conclude

$u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ove $\alpha = 2-n(1-\varepsilon)/2$. □

ii) caso $a^i = a^i(x,Du)$

Consideriamo il sistema fortemente ellittico

(5.33) $\sum_i D_i a^i(x,Du)=0$ in Ω

ove i coefficienti a^i verificano le ipotesi (5.2) e le seguenti

(5.34) $a^i(x,0)=0$ per ogni $(x,p)\in\Omega \times R^{nN}$

(5.35) esiste una funzione ω: $(0,\infty) \to [0,+\infty)$ limitata, non decrescente, $\omega(\sigma)$ infinitesima per $\sigma \to 0$ tale che per ogni $x,y\in\Omega$ e per ogni $p\in R^{nN}$

$$\| a^i(x,p)-a^i(y,p)\| \leq \omega(\|x-y\|)\cdot(1+\|p\|)$$

a) holderianità della soluzione

TEOREMA 5.7. Se $n\leq 4$

(5.36) $u\in C^{0,\alpha}(\Omega, R^N)$ ove $\alpha = \alpha(\nu,M,n) \in (0,1)$

Dimostrazione. Se n=2 si possono applicare i teoremi di regolarità per sistemi lineari al sistema

$$\sum_{ij} D_i(A_{ij}(x,Du)\, D_j u) = 0$$

ove $A_{ij}(.,Du) \in L^\infty(\Omega)$ e il sistema è fortemente ellittico.

Se $n>2$ sia v l' unica soluzione del problema di Dirichlet

(5.37)
$$\begin{cases} v-u \in H^1_o(B(r)) \\ \sum_i D_i a^i(x_o,Dv) = 0 \quad \text{in } B(r) \end{cases}$$

Applicando la (5.32) a U=Dv, per ogni $t\in(0,1)$ otteniamo

(5.38) $$\int_{B(tr)} \|Dv\|^2\, dx \leq c\, t^{2+\varepsilon n} \int_{B(r)} \|Dv\|^2\, dx \qquad \varepsilon n\in(0,1)$$

Poichè

$$\sum_i D_i[a^i(x_o,Du)-a^i(x_o,Dv)] = \sum_i D_i[a^i(x_o,Du)-a^i(x,Du)]$$

$$a^i_h(x_o,Du)-a^i_h(x_o,Dv) = \sum_{jk} A^{hk}_{ij} D_j w_k$$

ove

$$A^{hk}_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial a^i_h(x_o, tDw+Dv)}{\partial p^j_k}\, dt$$

$w \in H^1_o(B(r))$ è soluzione del sistema lineare, fortemente ellittico, a coefficienti $A_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_{B(r)} \sum_{ij} (A_{ij} D_j w \mid D_i \varphi)\, dx = \int_{B(r)} \sum_i (a^i(x_o, Du) - a^i(x, Du) \mid D_i \varphi)\, dx$$

per ogni $\varphi \in H^1_o(B(r), R^N)$

da cui segue

$$\int_{B(r)} \|Dw\|^2\, dx \leq c(\nu)\, \omega(r) \int_{B(r)} (1 + \|Du\|)^2\, dx$$

Poichè $u=v+w$, seguendo un procedimento ormai standard, si prova che per ogni $\mu \in (0, \varepsilon n)$ esiste $r(\mu)$ tale che se $r \leq r(\mu)$ e per ogni $t \in (0,1)$

$$\int_{B(tr)} (1 + \|Du\|)^2\, dx \leq c\, t^{2+\mu} \int_{B(r)} (1 + \|Du\|)^2\, dx$$

Quindi, applicando la diseguaglianza di Poincarè, per ogni $r \leq r(\mu)$ e per ogni $t \in (0,1)$ si ha

$$\int_{B(tr)} \|u - u_{B(tr)}\|^2\, dx \leq c\, r^2\, t^{4+\mu} \int_{B(r)} (1 + \|Du\|)^2\, dx$$

da cui segue

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega, R^N) \qquad \text{con } \alpha = (4+\mu-n)/2. \qquad \square$$

Il teorema precedente prova che, se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è una soluzione del sistema (5.33) allora risulta $u \in C^{0,\alpha}(\Omega, R^N)$ con $\alpha \in (0,1)$ opportuno e dipendente dai coefficienti a^i del sistema. Invece, nel caso di un sistema fortemente ellittico non lineare e ad andamenti controllati, nel teorema 5.14, proveremo che, se $n>2$, u è parzialmente holderiana in Ω e detto Ω_o l' insieme di singolarità della u, si prova

$$H_{n-q}(\Omega_o) = 0 \qquad \text{per qualche } q>2.$$

Se si considerano sistemi fortemente ellittici, ma ad andamenti quadratici, proveremo che, se $u \in H^1(\Omega, R^N) \cap L^\infty(\Omega)$ è una soluzione, in opportune ulteriori ipotesi sui coefficienti, allora u è parzialmente holderiana in Ω, ma nulla verrà precisato circa la misura di Hausdorff dell' insieme singolare Ω_o.

b) <u>differenziabilità della soluzione.</u>

<u>TEOREMA 5.8 ([Q])</u>. Se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione del sistema fortemente ellittico (5.33) e $a^i \in C^1(\bar{\Omega} x R^{nN})$, i=1,...n, verificano le seguenti ipotesi

(5.39) $\left\| \frac{\partial a^i}{\partial p^j_k} \right\| \leq M$

(5.40) $\left\| \frac{\partial a^i}{\partial x_s} \right\| + \| a^i \| \leq c\ V(p)$

allora risulta $u \in H^2_{loc}(\Omega, R^N)$ ed inoltre vale la maggiorazione

$$|u|^2_{H^2_{loc}(\Omega, R^N)} \leq H.$$

Si è ritenuto opportuno riportare l' enunciato del teorema 5.8 per evidenziare che, se i coefficienti a^i non dipendono esplicitamente da u, allora non occorre supporre $u \in C^{o,\alpha}(\bar{\Omega}, R^N)$, a differenza di quanto avviene nel teorema 5.15. Inoltre il teorema 5.8 è ancora vero se si considerano sistemi fortemente ellit= tici e ad andamenti controllati. Tale caso è stato omesso per brevità di espo= sizione e per esso rimandiamo, ancora una volta, a [Q].

iii) caso generale

a) holderianità della soluzione

Nel caso in cui i coefficienti a^i dipendano anche da u, il teorema di regolarità 5.7 diventa un teorema di holderianità parziale per ogni $n>2$. Tale risultato non è migliorabile come mostra un controesempio di Necas-Stara ([24]).

CONTROESEMPIO

Siano $n=N\geqslant 3$ e $\Omega=B(0,1)$. Poniamo

$$B_i^h(x,u)=c\left(\delta_{ih}+b\,\frac{u_i u_h\|x\|^{2\alpha-2}}{1+\|u\|^2\,\|x\|^{2\alpha-2}}\right)$$

$$A_{ij}^{hk}(x,u)=B_i^h B_j^k+\delta_{ij}\,\delta_{hk}$$

ove

$b=2n/(n-2)$ $\quad c^2=\alpha(n-\alpha)(n-2)^2(n-2\alpha)^{-2}(n-1)^{-2}$ $\qquad \alpha\in(1,n/2)$.

Le matrici A_{ij} sono continue, limitate e fortemente ellittiche e, posto $u(x)=x\|x\|^{-\alpha}$, segue $u\in H^1(\Omega,R^N)$ ed è soluzione del sistema quasi lineare

$$\sum_{ij} D_i(A_{ij}(x,u)\,D_j u)=0$$

senza essere holderiano e neppure limitato in Ω.

Consideriamo il sistema fortemente ellittico

$$(5.41)\qquad Eu=\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u,Du)+b(x,u,Du)=0 \qquad \text{in } \Omega$$

Supponiamo che i vettori a^i e b abbiano andamenti controllati, ossia

$\|a^i(x,u,p)\|\leqslant c\,V(u,p)$ $\qquad$ per ogni $i=1,\dots n$

$\|b(x,u,p)\|\leqslant c\,V(u,p)$

essendo $V(u,p)$ definito come in (1.3).

Supponiamo, inoltre, che esista una funzione $\omega(r)\geqslant 0$ per $r\geqslant 0$, limitata, continua concava, non decrescente e con $\omega(0)=0$ tale che per ogni $x,y\in\Omega$, per ogni $u,v\in R^N$, per ogni $p\in R^{nN}$

(5.42) $\sum_i \|a^i(x,u,p)-a^i(y,v,p)\| \leq \omega(\|x-y\|^2+\|u-v\|^2)(1+\|u\|+\|v\|+\|p\|)$

Osserviamo che il sistema (5.41) si può riscrivere nella forma seguente

(5.43) $\sum_i D_i \tilde{a}^i(x,u,Du) + b(x,u,Du) = \sum_i D_i A^i(x,u)$

ove $\tilde{a}^i(x,u,Du)=a^i(x,u,Du)-a^i(x,u,0)$ e $A^i(x,u)=-a^i(x,u,0)$. Con tali notazioni risulta $\tilde{a}^i(x,u,0)=0$ ed inoltre

(5.44) $\|\tilde{a}^i(x,u,p)\| \leq c\, V(u,p)$ per ogni $i=1,\dots n$

(5.45) $\sum_i \|\tilde{a}^i(x,u,p)-\tilde{a}^i(y,v,p)\| \leq 2\omega(\|x-y\|^2+\|u-v\|^2)(1+\|u\|+\|v\|+\|p\|)$

LEMMA 5.9. Se $u\in H^1(\Omega, R^N)$ è una soluzione del sistema (5.43), per ogni sfera $B(2r)\subset\subset\Omega$, per ogni $\varepsilon>0$ e per tutte le funzioni $\vartheta\in C_0^\infty(R^n)$ tali che

(5.46) $0\leq \vartheta\leq 1$, $\vartheta=1$ su $B(r)$, $\vartheta=0$ in $R^n-B(2r)$ $\|D\vartheta\| \leq cr^{-1}$

si ha la seguente diseguaglianza " tipo Cacciopoli"

(5.47) $$\nu\int_{B(2r)} \vartheta^2 \|Du\|^2\,dx \leq cr^{-2}\int_{B(2r)} \|u-u_{B(2r)}\|^2\,dx + \varepsilon\int_{B(2r)} \vartheta^2 V^2\,dx$$

Dimostrazione. Dall' equazione

$$\int_\Omega \sum_i (\tilde{a}^i(x,u,Du)|\,D_i\varphi)\,dx + \int_\Omega (b(x,u,Du)|\,\varphi)\,dx = \int_\Omega \sum_i (A^i(x,u)|\,D_i\varphi)\,dx$$

per ogni $\varphi\in H_0^1(\Omega, R^N)$, posto $\varphi=\vartheta^2(u-u_{B(2r)})$ segue

(5.48) $$\int_\Omega \sum_i (\tilde{a}^i(x,u,Du)|\,\vartheta^2 D_i u)\,dx = -2\int_\Omega \sum_i (\tilde{a}^i(x,u,Du)|\,\vartheta D_i\vartheta\,(u-u_{B(2r)}))\,dx +$$
$$-\int_\Omega (b(x,u,Du)|\,\vartheta^2(u-u_{B(2r)}))\,dx + \int_\Omega \sum_i (A^i(x,u)|\,\vartheta^2 D_i u + \vartheta\, D_i\vartheta\,(u-u_{B(2r)}))\,dx.$$

Dalla condizione di forte ellitticità, essendo i coefficienti ad andamento controllato, si ha

$$\nu\int_{B(2r)} \vartheta^2\|Du\|^2\,dx \leq c\sum_i \int_{B(2r)} (\vartheta|D_i\vartheta| + \vartheta^2 + \vartheta^2\|D_i u\|)(1+\|u\|+\|Du\|)\,\|u-u_{B(2r)}\|\,dx$$

da cui, per ogni $\varepsilon>0$, segue

$$\nu\int_{B(2r)} \vartheta^2\|Du\|^2\,dx \leq c\,r^{-2}\int_{B(2r)} \|u-u_{B(2r)}\|^2\,dx + \varepsilon\int_{B(2r)} \vartheta^2 V^2\,dx. \qquad \square$$

LEMMA 5.10. Se $u\in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione del sistema (5.43) esiste $p>1$ tale che $Du\in L^{2p}_{loc}(\Omega, R^{nN})$ e per ogni sfera $B(2r)\subset\Omega$ si ha

(5.49) $$\left(⨍_{B(r)} V^{2p}\,dx\right)^{1/p} \leq c ⨍_{B(2r)} V^2\,dx.$$

Dimostrazione. Dalla diseguaglianza di Poincarè segue

$$\int_{B(2r)} \|u-u_{B(2r)}\|^2 \, dx \leq c \left(\int_{B(2r)} \|Du\|^{2n/(n+2)} \, dx \right)^{(n+2)/n}$$

Pertanto, con facili calcoli, dalla (5.47) , si prova

$$⨍_{B(r)} V^2 \, dx \leq c \left\{ ⨍_{B(2r)} V^{2n/(n+2)} \, dx \right\}^{(n+2)/n} + \varepsilon ⨍_{B(2r)} V^2 \, dx$$

Posto $U = V^{2n/(n+2)}$ e $q=(n+2)/n$ dal lemma 4.33 segue che esiste $\varepsilon_o > 0$ tale che per ogni $\varepsilon < \varepsilon_o$ esiste $\delta > 0$, dipendente da c e da n, tale che per ogni $t \in [q, q+\delta)$ risulta

$$\left(⨍_{B(r)} U^t \, dx \right)^{1/t} \leq K \left(⨍_{B(2r)} U^q \, dx \right)^{1/q}$$

da cui, sostituendo, si ottiene la (5.49). □

Premettiamo un risultato provato in [18].

LEMMA 5.11. Sia A un insieme limitato di R^n e $g: A \to (0,1)$. Allora esiste una successione di punti $x_i \in A$ tale che

(5.50) $B(x_i, g(x_i)) \cap B(x_j, g(x_j)) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$

(5.51) $\bigcup_i B(x_i, 3g(x_i)) \supset A$

TEOREMA 5.12. Sia Ω un aperto di R^n, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in [0,n)$. Posto

(5.52) $E_\alpha \doteq \{ x \in \Omega : \limsup_{\rho \to 0^+} \rho^{-\alpha} \int_{B(x,\rho)} |f(y)| \, dy > 0 \}$

si ha

(5.53) $H_\alpha(E_\alpha) = 0.$

Dimostrazione. Proviamo che per ogni compatto $K \subset \Omega$ posto $F = K \cap E_\alpha$ segue

$$H_\alpha(F) = 0.$$

Per ogni $s \in N$ poniamo

$$F_s \doteq \{ x \in F : \limsup_{\rho \to 0^+} \rho^{-\alpha} \int_{B(x,\rho)} |f(y)| \, dy > 1/s \}$$

da cui si ha

$$F = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s$$

e pertanto basta provare che

$$H_\alpha(F_s) = 0 \qquad\qquad \text{per ogni } s \in \mathbb{N}.$$

Sia Q un aperto limitato tale che $K \subset Q \subset\subset \Omega$ e sia $d = \min\{\operatorname{dist}(K, \partial Q), 1\}$. Per ogni $\varepsilon \in (0,d)$ e per ogni $x \in F_s$ esiste $g(x) < \varepsilon$ tale che

$$g(x)^{-\alpha} \int_{B(x,g(x))} |f(y)|\, dy \geq 1/2s.$$

Siano x_i come nell' enunciato del lemma precedente. Posto $g_i = g(x_i)$ segue

$$\text{mis}\{\bigcup_i B(x_i, g_i)\} = \omega_n \sum_i g_i^n \leq \omega_n \varepsilon^{n-\alpha} \sum_i g_i^\alpha \leq 2s\, \omega_n \varepsilon^{n-\alpha} \int_Q |f(y)|\, dy$$

da cui, per $\varepsilon \to 0$, segue la tesi. □

Riportiamo l' enunciato di un lemma provato a pag. 10 di [Q].

<u>LEMMA 5.13</u>. Siano φ, $\omega_1 : (0,d] \to [0,+\infty)$ e $\omega_2 : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ e ω_1, ω_2 non decrescenti. Siano A, α costanti positive e $\beta \in [0,\alpha)$. Supponiamo che per ogni $t \in (0,1)$ e per ogni $r \in (0,d]$

$$\varphi(tr) \leq \{A t^\alpha + \omega_1(r) + \omega_2(r^{-\beta} \varphi(r))\} \varphi(r).$$

Supponiamo che per un $\varepsilon \in (0, \alpha - \beta]$ esista $r_\varepsilon \in (0,d]$ tale che

$$F(r_\varepsilon) = \omega_1(r_\varepsilon) + \omega_2(r_\varepsilon^{-\beta} \varphi(r_\varepsilon)) < (1+A)^{-\alpha/\varepsilon}.$$

Allora per ogni $t \in (0,1)$

$$\varphi(t r_\varepsilon) \leq B\, t^{\alpha-\varepsilon} \varphi(r_\varepsilon) \qquad\qquad \text{ove } B = (1+A)^{\alpha/\varepsilon}.$$

Dimostriamo ora il teorema di parziale holderianità.

<u>TEOREMA 5.14</u>. Se $u \in H^1(\Omega, R^N)$ è soluzione del sistema (5.43) ed inoltre $2 \leq n \leq 4$ allora u è parzialmente holderiana in Ω e, indicato con Ω_o l' insieme singolare di u, si ha

$$H_{n-2p}(\Omega_o) = 0 \qquad\qquad \text{per qualche } p > 1. \tag{5.54}$$

In particolare se $n=2$ il vettore u è holderiano in Ω.

Se $n > 4$ e $\dfrac{\partial a^i_j}{\partial p_k}$ sono uniformemente continue in $\Omega \times R^N \times R^{nN}$, il vettore u è parzialmente α-holderiano in Ω, per ogni $\alpha \in (0,1)$.

<u>Dimostrazione</u>. Dalla (5.49) e dalla diseguaglianza di Sobolev segue che u è

holderiana se $n=2$. Se $n>2$ sia $B(r)=B(x_o,r)\subset\subset\Omega$. In $B(r)$ poniamo $u=v+w$ ove v è

soluzione del problema di Dirichlet

$$(5.55)\quad \begin{cases} v-u\in H^1_o(B(r),R^N) \\ \int_{B(r)}\sum_i(\tilde a^i(x_o,u_{B(r)},Dv)\mid D_i\varphi)\,dx=0 \qquad \text{per ogni } \varphi\in H^1_o(B(r),R^N)\end{cases}$$

e w è la soluzione del seguente problema di Dirichlet

$$(5.56)\quad \begin{cases} w\in H^1_o(B(r),R^N) \\ \int_{B(r)}\sum_i(\tilde a^i(x_o,u_{B(r)},Dw+Dv\mid D_i\varphi)\,dx=\sum_i\int_{B(r)}(f^i\mid D_i\varphi)\,dx+\int_{B(r)}(b(x,u,Du)\mid\varphi)dx=0 \\ \text{per ogni } \varphi\in H^1_o(B(r),R^N)\end{cases}$$

ove $f^i=(\tilde a^i(x_o,u_{B(r)},Du)-\tilde a^i(x,u,Du))+A^i(x,u)$.

Ponendo

$$A_{ij}=\{A^{hk}_{ij}\}\ \text{e}\ A^{hk}_{ij}=\int_0^1\frac{\partial\tilde a^i_h}{\partial p^j_k}(x_o,u_{B(r)},tDw+Dv)\,dt$$

si ottiene

$$(5.57)\quad \int_{B(r)}\sum_{ij}(A_{ij}D_jw\mid D_i\varphi)\,dx=\sum_i\int_{B(r)}(f^i(x,u,Du)\mid D_i\varphi)\,dx+\int_{B(r)}(b(x,u,Du)\mid\varphi)\,dx$$

per ogni $\varphi\in H^1_o(B(r),R^N)$

Dalla maggiorazione (5.23) segue

$$(5.58)\quad \int_{B(tr)}\|Dv\|^2\,dx\le c\,t^{2+\varepsilon n}\int_{B(r)}\|Dv\|^2\,dx$$

Scegliendo $\varphi=w$ nella (5.57), tenendo conto della (5.49) e della (5.45) si ha

$$c(\nu)\int_{B(r)}\|Dw\|^2\,dx\le\int_{B(r)}\omega(r^2+\|u-u_{B(r)}\|^2)(1+\|u_{B(r)}\|+\|u\|+\|Du\|)\|Dw\|\,dx+$$

$$+\int_{B(r)}(1+\|u\|+\|Du\|)(\|w\|+\|Dw\|)\,dx=(I).$$

Dal lemma 5.10, ricordando le proprietà di ω e la diseguaglianza di Jensen, segue

$$(I)\le\left(\int_{B(r)}\|Dw\|^2\,dx\right)^{\frac12}\cdot\left\{\int_{B(r)}\omega^2(\ldots)(1+\|u_{B(r)}\|+\|u\|+\|Du\|)^2\,dx\right\}^{\frac12}+$$

$$+c\left(\int_{B(r)}(\|w\|^2+\|Dw\|^2)\,dx\right)^{\frac12}\cdot\left(\int_{B(r)}(1+\|u\|+\|Du\|)^2\,dx\right)^{\frac12}\le$$

$$\le c\left(\int_{B(r)}\|Dw\|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_{B(r)}V^{2p}\,dx\right)^{1/2p}\left(\int_{B(r)}\omega^{2p'}(\ldots)\,dx\right)^{1/2p'}+$$

$$+ c\left(\int_{B(r)} \|w\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(r)} V^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq c\left(\int_{B(r)} \|Dw\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(r)} V^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left[\omega\left(cr^2 + \fint_{B(r)} \|u-u_{B(r)}\|^2 dx\right)\right]^{1/2p'}$$

ove c non dipende da r. Pertanto dalla diseguaglianza di Sobolev si ottiene

$$(5.59) \quad \int_{B(r)} \|Dw\|^2 dx \leq c \int_{B(r)} V^2 dx \left[\omega(c\, r^{2-n} \int_{B(r)} V^2 dx)\right]^{1/p'}$$

Siccome u=v+w, per ogni $B(r)\subset\Omega$ e per ogni $t\in(0,1)$ dalle (5.58) e (5.59) segue

$$(5.60) \quad \int_{B(tr)} \|Du\|^2 dx \leq c\left\{t^{2+\varepsilon n} + \omega(\ldots)^{1/p'}\right\} \int_{B(r)} V^2 dx.$$

Chiaramente si ha

$$(5.61) \quad \int_{B(tr)} 1\, dx \leq t^n \int_{B(r)} V^2 dx$$

e, tenendo conto della diseguaglianza di Poincarê, segue

$$(5.62) \quad \int_{B(tr)} \|u\|^2 dx \leq 2\int_{B(r)} \|u-u_{B(r)}\|^2 dx + 2\int_{B(tr)} \|u_{B(r)}\|^2 dx \leq$$

$$\leq c\, r^2 \int_{B(r)} \|Du\|^2 dx + c\, t^n \int_{B(r)} \|u\|^2 dx.$$

Quindi, dalle (5.60), (5.61) e (5.62), scelto ε sufficientemente piccolo, si ottiene

$$(5.63) \quad \int_{B(tr)} V^2 dx \leq K\left\{t^{2+\varepsilon n} + r^2 + \left[\omega(cr^{2-n}\int_{B(r)} V^2 dx)\right]^{1/p'}\right\} \int_{B(r)} V^2 dx.$$

Poniamo

$$\Omega_o \doteq \{ x\in\Omega : \min\lim_{r\to 0} r^{2-n} \int_{B(x,r)} V^2 dy > 0\}.$$

Per un noto teorema di Lebesgue risulta mis $\Omega_o=0$ ed inoltre, se p è definito come nel lemma 5.10, segue

$$r^{2-n} \int_{B(r)} V^2 dx \leq c\left(r^{2p-n} \int_{B(r)} V^{2p} dx\right)^{1/p}.$$

Quindi, posto q=2p, si ha

$$(5.64) \quad r^{2-n} \int_{B(x,r)} V^2 dy \leq c\left(r^{q-n} \int_{B(x,r)} V^q dy\right)^{2/q}$$

da cui, per il teorema 5.12, risulta

$$H_{n-q}(\Omega_o) = 0.$$

Proviamo che Ω_o è chiuso in Ω.

Fissato $x_o \in \Omega - \Omega_o$, poniamo

$$\omega_1(s)=Ks^2$$

$$\omega_2(s)=K\,[\omega(cs)]^{1/p'}$$

$$G(x_o,r)=\omega_1(r)+\omega_2\left(r^{2-n}\cdot\int_{B(x_o,r)} V^2\,dx\right)$$

da cui si ha

(5.65) $$\operatorname*{minlim}_{r\to 0}\ G(x_o,r)=0.$$

Posto

$$d_{x_o}=\inf\{\|x_o-x\|: x\notin\Omega\}$$

dalla (5.65) segue che per ogni $\varepsilon_o \in (0,4+\varepsilon n-n]$ esiste $r_o(x_o)<\frac{1}{2}d_{x_o}$ tale che

$$G(x_o,r_o)<(1+K)^{-(2+\varepsilon n)/\varepsilon_o}$$

Poichè $y\to G(y,r_o)$ è continua in Ω, esiste $B(x_o,\rho)$ tale che $\rho+r_o<d_{x_o}$ e

$$G(y,r_o)<(1+K)^{-(2+\varepsilon n)/\varepsilon_o}\qquad \text{per ogni } y\in B(x_o,\rho).$$

Per ogni $y\in B(x_o,\rho)$ e $\rho<\frac{1}{2}d_{x_o}$ vale la maggiorazione (5.63) e, quindi posto

$$\varphi(s)=\int_{B(y,s)} V^2\,dx$$

$$F(t)=G(y,t)$$

segue

$$\varphi(t\rho)\leqslant\left\{K\,t^{2+\varepsilon n}+\omega_1(\rho)+\omega_2(\rho^{2-n}\varphi(\rho))\right\}\varphi(\rho)$$

$$F(r_o)<(1+K)^{-(2+\varepsilon n)/\varepsilon_o}.$$

Allora per il lemma 5.13 per ogni $t\in(0,1)$ si ha

$$\varphi(tr_o)\leqslant B\,t^{2+\varepsilon n-\varepsilon_o}\,\varphi(r_o)\qquad \text{ove } B=(1+K)^{(2+\varepsilon n)/\varepsilon_o}$$

da cui, scelto $\varepsilon_o<(4+\varepsilon n-n)$, e posto $\delta=4+\varepsilon n-n-\varepsilon_o$, segue

(5.66) $$\varphi(tr_o)\leqslant B\,t^{n-2+\delta}\,\varphi(r_o).$$

Pertanto si ottiene

$$\lim_{r\to 0}\frac{\varphi(r)}{r^{n-2}}=0.$$

Quindi

$$x \in \Omega - \Omega_o \quad \Rightarrow \quad y \in \Omega - \Omega_o \qquad \text{per ogni } y \in B(x_o, \rho).$$

Allora $B(x_o, \rho) \subset \Omega - \Omega_o$, cioè $\Omega - \Omega_o$ è aperto e pertanto Ω_o è chiuso in Ω.

Concludiamo con il risultato di parziale holderianità nel caso in cui $n \in (2,4]$.

Dalla (5.66) segue

$$D_i u \in L^{2,n-2+\delta}(B(x_o,r),R^N) \qquad \text{per ogni } \delta \text{ sufficientemente piccolo}$$

e quindi

$$D_i u \in L^{2,n-2+\delta}_{loc}(\Omega - \Omega_o, R^N).$$

Pertanto, per il teorema 3.10, risulta

$$u \in \mathcal{L}^{2,\nu}_{loc}(\Omega - \Omega_o, R^N)$$

ove $\nu = n+\delta$. Dal teorema 3.8 si ottiene

$$u \in C^{0,\delta/2}(\Omega - \Omega_o, R^N) \text{ per ogni } \delta \text{ sufficientemente piccolo.}$$

Esaminiamo ora il caso $n>4$.

Riscriviamo il sistema (5.43) nella forma

$$\sum_{ij} D_i (A_{ij}(x,u,Du) D_j u) + b(x,u,Du) = \sum_i D_i A^i(x,u).$$

Sia $B(r)=B(x_o,r) \subset\subset \Omega$ e poniamo $A^o_{ij} = A_{ij}(x^o, u_{B(r)}, (Du)_{B(r)})$.

Essendo $\frac{\partial a^i_j}{\partial p_k}$ uniformemente continue e limitate segue che esiste $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua, non decrescente, concava, tale che $\omega(0)=0$ e

$$(5.67) \qquad \{\sum_{ij} \| A^o_{ij} - A_{ij}(x,u,Du) \|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \omega(\|x-x_o\| + \|u-u_{B(r)}\|^2 + \|Du-(Du)_{B(r)}\|^2).$$

Consideriamo $v \in H^1(B(r),R^N)$ e $w \in H^1_o(B(r),R^N)$ soluzioni dei seguenti problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} v-u \in H^1_o(B(r),R^N) \\ \sum_{ij} D_i (A^o_{ij} D_j v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \in H^1_o(B(r),R^N) \\ \sum_{ij} D_i (A^o_{ij} D_j w) = \sum_{ij} D_i [(A^o_{ij} - A_{ij}) D_j u] - b(x,u,Du) + \sum_i D_i A^i(x,u). \end{cases}$$

Poichè A^o_{ij} sono costanti dalla teoria dei sistemi lineari si ottiene

$$(5.68)\qquad \int_{B(tr)} \|Dv\|^2\,dx \leq c\,t^n \int_{B(r)} \|Dv\|^2\,dx \qquad \text{per ogni } t\in(0,1)$$

e, analogamente a quanto provato nel caso $n\leq 4$, si ha

$$(5.69)\qquad \int_{B(r)} \|Dw\|^2\,dx \leq c \int_{B(2r)} V^2\,dx\,\Big[\omega^2\Big(cr^{2-n}\int_{B(r)} V^2\,dx + \fint_{B(r)} \|Du-(Du)_{B(r)}\|^2 dx\Big)\Big]^{1-2/q}.$$

Essendo $u=v+w$ in $B(r)$ dalle (5.68) e (5.69) per ogni $t\in(0,1)$ segue

$$(5.70)\qquad \int_{B(tr)} V^2\,dx \leq c \int_{B(r)} V^2\,dx \Big\{ t^n + r^2 + [\omega(\ldots)]^{1-2/q} \Big\}$$

Dalla (5.70) si ottiene la parziale holderianità analogamente al caso $n\leq 4$.

Se $x_o\in\Omega - \Omega_o$, dalla continuità della funzione integrale, analogamente al caso $n\leq 4$, segue che esiste una sfera $B(x_o,r)\subset\Omega-\Omega_o$ e quindi $\Omega-\Omega_o$ è aperto, ossia Ω_o è chiuso in Ω.

Definiamo Ω_1 e Ω_2 nel modo seguente

$$\Omega_1 = \Big\{ x\in\Omega \;:\; \underset{r\to 0}{\text{minlim}}\; r^{2-n}\cdot\int_{B(x,r)} V^2\,dy > 0 \Big\}$$

$$\Omega_2 = \Big\{ x\in\Omega \;:\; \underset{r\to 0}{\text{maxlim}} \fint_{B(x,r)} \|Du-(Du)_{B(r)}\|^2\,dy > 0 \Big\}.$$

Si verifica immediatamente

$$\Omega_1 \subset \Omega_o \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Non essendo controllabile la misura di Hausdorff di Ω_2, questa dimostrazione permette di concludere che mis $\Omega_o=0$. □

b) <u>differenziabilità delle soluzioni.</u>

Consideriamo il sistema fortemente ellittico

$$(5.71)\qquad \sum_i D_i a^i(x,u,Du) + a^o(x,u,Du) + \sum_i D_i A^i(x,u) = 0$$

con le seguenti condizioni

$$(5.72)\qquad a^i(x,u,0) = 0$$

$$(5.73)\qquad \|a^i(x,u,p)\| \leq c\,V(u,p) \qquad \text{per ogni } i=0,1\ldots n$$

e supposti i coefficienti in $C^1(\bar\Lambda)$, siano verificate le seguenti "condizioni di crescita naturali sulle derivate"

per ogni $(x,u,p)\in\Lambda$ con $\|u\|\leq K$ risulti

(5.74) $\quad \| a^i \| + \sum_{s=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial x_s} \right\| + \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial u_k} \right\| \leq c(K)\ V(p) \qquad$ per ogni $i = 1 \dots n$

(5.75) $\quad \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} \right\| \leq c(K) \qquad$ per ogni $i = 1 \dots n$

(5.76) i vettori A^i verificano le ipotesi (5.73) e (5.74).

Proviamo il teorema di differenziabilità.

<u>TEOREMA 5.15.</u> Sia $u \in H^1 \cap C^{0,\alpha}(\Omega, R^N)$, $\alpha > 0$, soluzione del sistema (5.71).

Nelle ipotesi (5.72), (5.73), (5.74), (5.75) e (5.76) risulta $u \in H^2_{loc}(\Omega, R^N)$ ed

inoltre vale la maggiorazione

(5.77) $\quad | u |^2_{H^2_{loc}(\Omega, R^N)} \leq H$

ove H dipende da ν, $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ e $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

<u>Dimostrazione.</u> Fissiamo una sfera $B(r) \subset\subset \Omega$ e s tale che $1 \leq s \leq n$.

Sia $\vartheta \in C^\infty_o(\Omega)$ tale che $\vartheta \geq 0$, $\vartheta = 0$ in $\Omega - B(r_o)$ ove $r_o = (r+\rho)/2$ essendo $\rho \in (0,r)$,

$\vartheta = 1$ in $B(\rho)$ e $| D_i \vartheta | \leq c(r-\rho)^{-1}$ per ogni $i = 1, \dots n$.

Poniamo

$$\varphi = \tau_{s,-h}(\vartheta^2 \tau_{s,h} u) \qquad \text{con } |h| \leq (r-\rho)/4$$

ove

$$\tau_{s,h} u(x) = u(x + he^s) - u(x).$$

Analogamente al teorema 5.1 otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (\tau_{s,h}(a^i(x,u,Du) + A^i(x,u)) \mid D_i(\vartheta^2 \tau_{s,h} u))\, dx + \int_\Omega (\tau_{s,h} b(x,u,Du) \mid \vartheta^2 \tau_{s,h} u)\, dx = 0.$$

Se $f \colon \Lambda \to R^N$ definiamo

$$\tilde{f} = \int_0^1 f(x + the^s, u + t\tau_{s,h} u, Du + t\tau_{s,h} Du)\, dt$$

da cui

$$\tau_{s,h} a^i(x,u,Du) = h \frac{\partial \tilde{a}^i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{N} \tau_{s,h} u_k \frac{\partial \tilde{a}^i}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \tau_{s,h} D_j u_k \frac{\partial \tilde{a}^i}{\partial p_k^j}$$

Pertanto, posto

$$\mathfrak{a}^i(x,u,p) = a^i(x,u,p) + A^i(x,u) \qquad \text{per ogni } i=1,\dots n$$

dalle ipotesi considerate, segue

$$(5.78) \quad \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial p_k^j} \right\| \leqslant M(K)$$

$$(5.79) \quad \sum_{s=1}^{n}\left\| \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial x_s} \right\| + \sum_{k=1}^{N}\left\| \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial u_k} \right\| \leqslant M(K)\,(1+\|Du\|+\|\tau_{s,h}Du\|) \qquad \text{per ogni } i=1,\dots n.$$

Quindi otteniamo

$$(5.80) \int_{B(r)} \sum_{k=1}^{N}\sum_{ij=1}^{n} (\vartheta\,\tau_{s,h}D_ju_k \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial p_k^j} | \vartheta\,\tau_{s,h}D_iu)\,dx = -2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\int_{B(r)} (\vartheta\tau_{s,t}D_ju_k \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial p_k^j} | D_i\vartheta\,\tau_{s,h}u)\,dx +$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\int_{B(r)} (\tau_{s,h}u_k \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial u_k} | \vartheta^2\tau_{s,h}D_iu + \vartheta\, D_i\vartheta\,\tau_{s,h}u)\,dx +$$

$$- h\sum_{i=1}^{n}\int_{B(r)} (\frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial x_s} | \vartheta^2\,\tau_{s,h}D_iu + \vartheta D_i\vartheta\,\tau_{s,h}u)\,dx + \int_{B(r)} (a^o(x,u,Du)|\,\tau_{s,-h}(\vartheta^2\,\tau_{s,h}u))\,dx.$$

Minoriamo il primo membro della (5.80); dalla ipotesi di forte ellitticità si ha

$$(5.81) \quad \int_{B(r)} \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} (\vartheta\tau_{s,h}D_ju_k \frac{\partial \tilde{\mathfrak{a}}^i}{\partial p_k^j} | \vartheta\,\tau_{s,h}D_iu)\,dx \geqslant \nu\int_{B(r)} \vartheta^2\,\|\tau_{s,h}Du\|^2\,dx$$

Indichiamo, rispettivamente, con A,B, C, D gli integrali a secondo membro della (5.80) e maggioriamo i singoli integrali.

Per ogni $\varepsilon > 0$ otteniamo

$$|A| \leqslant c(K)\,(r-\rho)^{-1}\int_{B(r_o)} \vartheta\,\|\tau_{s,h}u\|\;\|\tau_{s,h}Du\|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int_{B(r_o)} \vartheta^2\,\|\tau_{s,h}Du\|^2\,dx + c(\varepsilon,K)\,(r-\rho)^{-2}\int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h}u\|^2\,dx$$

$$|B| \leqslant M(K)\int_{B(r)} (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h}Du\|)\;\|\tau_{s,h}u\|\;\vartheta^2\|\tau_{s,h}Du\|\,dx +$$

$$+ c(K)\int_{B(r)} (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h}Du\|)\;\|\tau_{s,h}u\|^2\,\vartheta\,(r-\rho)^{-1}\,dx \leqslant$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon,K) \int_{B(r)} \vartheta^2 (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|)^2 \|\tau_{s,h} u\|^2 dx$$

$$+ c(K)(r-\rho)^{-1} \int_{B(r)} \vartheta (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|) \|\tau_{s,h} u\|^2 dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon,K) \int_{B(r)} \vartheta^2 (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|)^2 \|\tau_{s,t} u\|^2 dx +$$

$$+ c(K)(r-\rho)^{-2} \int_{B(r)} \|\tau_{s,h} u\|^2 dx.$$

Dalla holderianità di u segue

$$(5.82) \qquad \|\tau_{s,t} u\|^2 = \|u(x+he^s)-u(x)\|^2 \leq \|u\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)} |h|^{2\alpha}.$$

Pertanto, ricordando che $h < (r-\rho)/4$, si ha

$$(5.83) \quad |A| \leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon, K, \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)})(\text{mis}(\Omega)).$$

Inoltre

$$(5.84) \quad \int_{B(r_o)} \sum_{j=1}^{n} \|\tau_{s,h} D_j u\|^2 dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{B(r_o)} \|D_j u(x+he^s)-D_j u(x)\|^2 dx \leq c \int_{B(r)} \|Du\|^2 dx$$

e quindi

$$(5.85) \quad |B| \leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon, K, \||u|\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}) \int_{B(r_o)} (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|)^2 dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon, K, \||u|\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}) \int_{B(r_o)} (1+\|Du\|)^2 dx.$$

Maggioriamo C.

$$|C| \leq c(K) \left(\int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B(r_o)} \vartheta^2 (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ |h| \left(\int_{B(r_o)} \vartheta^2 (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h} u\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon,K) \int_{B(r_o)} (1+\|Du\|+\|\tau_{s,h} Du\|)^2 dx + |h|^2 \int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h} u\|^2 dx.$$

Quindi, dal lemma 4.1 e dalla (5.84) otteniamo

$$(5.86) \quad |C| \leq \varepsilon \int_{B(r_o)} \vartheta^2 \|\tau_{s,h} Du\|^2 dx + c(\varepsilon,K) \int_{B(r)} (1+\|Du\|)^2 dx.$$

Infine maggioriamo D.

$$|D| \leqslant c\left\{\int_{B(r_o)}(1+\|u\|+\|Du\|)^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{B(r_o)}\|\tau_{s,-h}(\vartheta^2\,\tau_{s,h}u)\|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\int_{B(ro)}(1+\|u\|+\|Du\|)^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{B(r_o)}\vartheta^2\,[\,(r-\rho)^{-2}\,\|\tau_{s,h}u\|^2+\vartheta^2\sum_{j=1}^{n}\|\,\tau_{s,h}D_ju\|^2\,]\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int_{B(r_o)}\vartheta^2\,\|\tau_{s,h}Du\|^2\,dx + c(\varepsilon)\int_{B(r_o)}(1+\|u\|+\|Du\|)^2\,dx + \varepsilon\int_{B(r_o)}\vartheta^2(r-\rho)^{-2}\,\|\tau_{s,h}u\|^2\,dx.$$

Pertanto dalla (5.82) segue

$$(5.87)\quad |D| \leqslant \varepsilon\int_{B(r_o)}\vartheta^2\,\|\tau_{s,h}Du\|^2\,dx + c(\varepsilon)\int_{B(r_o)}(1+\|u\|+\|Du\|)^2\,dx +$$

$$+ c(\varepsilon)\,|||u|||^2_{C^{o,\alpha}(\Omega)}\,.\mathrm{mis}(\Omega).$$

Scelto ε sufficientemente piccolo, dalle (5.81), (5.83), (5.85), (5.86) e (5.87)

segue

$$c(\nu)\int_{B(\rho)}\|\tau_{s,h}Du\|^2\,dx \leqslant c(K, |||u|||_{C^{o,\alpha}(\Omega)})\cdot\int_{B(r_o)}(1+\|Du\|)^2\,dx + c\int_{B(r_o)}\|u\|^2\,dx$$

ovvero

$$(5.88)\qquad \int_{B(\rho)}\|\tau_{s,h}Du\|^2\,dx \leqslant H \qquad \text{per ogni } \rho\in(0,r) \text{ e } |h|<(r-\rho)/4$$

ove H è una opportuna costante positiva dipendente da $|||u|||_{C^{o,\alpha}(\Omega)}$, $\|u\|_{H^1(\Omega)}$,

K, ν e mis(Ω).

Per il teorema 4.2 si conclude $u\in H^2_{loc}(\Omega,R^N)$ e vale la maggiorazione

$$\|u\|^2_{H^2_{loc}(\Omega,R^N)} \leqslant H. \qquad \square$$

<u>OSSERVAZIONE 5.16.</u> Nel teorema precedente l' ipotesi $u\in H^1\cap C^{o,\alpha}(\Omega,R^N)$ non

può essere indebolita se si considerano andamenti naturali sulle derivate.

Invece, nel caso di andamenti non naturali sulle derivate, cioè se supponiamo

$$(5.89)\quad \left\|\frac{\partial a^i}{\partial u_k}\right\| \leqslant M \qquad \text{per ogni } i=1,\ldots n \text{ e } k=1,\ldots N$$

allora si conclude analogamente al teorema precedente. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 5.15. Infatti, mantenendo le stesse notazioni, dal lemma 4.1, segue

$$(5.90) \qquad (r-\rho)^{-2} \int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h} u\|^2 \, dx \leq c\, h^{-2} \int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h} u\|^2 \, dx \leq c \int_{B(r)} \|Du\|^2 \, dx$$

$$(5.91) \qquad \int_{B(r_o)} \|\tau_{s,h} u\|^2 \, dx \leq 2 \int_{B(r)} \|u\|^2 \, dx.$$

Le maggiorazioni (5.89),(5.90) e (5.91) permettono, quindi, di provare la (5.77).

c) <u>holderianità del gradiente.</u>

Sia $u \in H^1(\Omega, R^N)$ soluzione del sistema fortemente ellittico

$$(5.92) \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u,Du) + b(x,u,Du) = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

con le ipotesi (5.72),(5.73),(5.74) e (5.75).

Come si è già visto nel capitolo II dal teorema di locale differenziabilità si ottiene la (2.4). Pertanto dalla teoria dei sistemi quasi-lineari segue il seguente teorema

<u>TEOREMA 5.17</u>. Se $u \in H^1(\Omega, R^N) \cap C^{o,\alpha}(\Omega, R^N)$ è soluzione del sistema (5.92) con le ipotesi (5.72),(5.73),(5.74) e (5.75) allora esistono un insieme Ω_o, chiuso in Ω e $\beta > 0$ tali che $D_i u \in C^{o,\beta}(\Omega - \Omega_o, R^N)$ per ogni $i=1,\ldots n$.

CAPITOLO VI

Sistemi ellittici non lineari ad andamenti quadratici.

Consideriamo il sistema non lineare e fortemente ellittico (con costante di ellitticità ν)

(6.1) $$\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u,Du) = \sum_{i=1}^{n} D_i A_i(x,u) + a^0(x,u,Du).$$

Poniamo

$$K = \sup\{ \|u(x)\| \ : \ x \in \bar{\Omega} \}$$

e supponiamo che i vettori $a^i(x,u,p)$, $i=0,1,\dots n$ siano misurabili in x, continui in (u,p) e tali che

(6.2) $a^i(x,u,0) = 0$ per ogni $i=1,\dots n$

Supponiamo, inoltre, che abbiano i seguenti andamenti non controllati (andamenti quadratici nel gradiente)

(6.3) $\|a^i(x,u,p)\| \leq c_1(K)(1+\|p\|)$ per ogni $(x,u,p)\epsilon\Lambda$ e $i=1,\dots n$

(6.4) $\|A_i(x,u)\| \leq c_1(K)$ per ogni $(x,u)\epsilon\Omega x R^N$ e $i=1,\dots n$

(6.5) $\|a^0(x,u,p)\| \leq c_2(K)(1+\|p\|^2)$.

Sia $u\epsilon H^1 \cap L^\infty(\Omega,R^N)$ una soluzione del sistema (6.1), ovvero

(6.6) $$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (a^i(x,u,Du) \mid D_i\varphi)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (A_i(x,u) \mid D_i\varphi)\, dx + \int_\Omega (a^0(x,u,Du)\mid\varphi)dx$$

per ogni $\varphi \epsilon H^1_0 \cap L^\infty(\Omega,R^N)$.

a) holderianità del vettore u.

Nel caso di andamenti non controllati e soluzioni $u\epsilon H^1 \cap L^\infty(\Omega,R^N)$ si prova che esiste un sottoinsieme Ω_0, chiuso in Ω, di misura nulla, tale che $u\epsilon C^{0,\gamma}(\Omega-\Omega_0)$ per un opportuno $\gamma\epsilon(0,1)$. Tuttavia, nel caso generale, a differenza di quanto avviene per i sistemi non lineari, non si è ancora riusciti a precisare la misura di Hausdorff dell' insieme singolare Ω_0. Nel caso particolare dei sistemi quasi lineari, invece, si può precisare la misura di Hausdorff dell' insieme Ω_0. La differenza consiste in un principio di massimo per sistemi lineari a coefficienti costanti che gioca un ruolo fondamentale nella dimostrazione del teorema di regolarità nel caso quasi lineare.

Proviamo alcuni risultati preliminari.

LEMMA 6.1. Sia $u \in H^1 \cap L^\infty(\Omega, R^N)$ soluzione del sistema non lineare (6.1).

Supponiamo che siano verificate le ipotesi (6.2),(6.3),(6.4),(6.5) ed inoltre risulti

(6.7) $\quad 2\, c_2\, K < \nu$

(6.8) $\quad$ le derivate $\dfrac{\partial a^i}{\partial p_k^j}$, $i=1,\dots n$, $k=1,\dots N$ sono uniformemente continue e limitate in Λ,

allora per ogni sfera $B(2r) \subset \Omega$, con $r \leqslant 1$, vale la maggiorazione

$$(6.9) \quad |u|^2_{H^1(B(r))} \leqslant c\, r^{-1} \|u - u_{B(2r)}\|^2_{L^2(B(2r))} + c(K)\, r^n .$$

Dimostrazione. Sia ϑ tale che

$0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $\vartheta = 1$ su $B(r)$ e $|D_j \vartheta| \leqslant c\, r^{-1}$ $\qquad$ per ogni $j=1,\dots n$

e poniamo

$$\varphi = \vartheta^2 (u - u_{B(2r)}) .$$

Allora dalla (6.6), ricordando le ipotesi (6.2),(6.3),(6.4),(6.5),(6.7) e (6.8) si prova la (6.9) con un procedimento analogo a quello seguito nella dimostrazione del lemma 5.9. $\square$

Dai lemmi 6.1 e 4.33 segue il seguente teorema

TEOREMA 6.2. Se $u \in H^1 \cap L^\infty(\Omega, R^N)$ è soluzione del sistema (6.1) e sono soddisfatte le ipotesi del lemma 6.1 allora esiste $p>2$ tale che $u \in H^{1,p}(\Omega, R^N)$ e per ogni sfera $B(2r) \subset \Omega$ e $r \leqslant 1$ si ha

$$(6.10) \quad \int_{B(r)} \left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2 \right)^{p/2} \leqslant c \left(\int_{B(2r)} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2\, dx \right)^{p/2} + c(K)\, r^{n/p} .$$

Si pone, quindi, il problema di vedere se la condizione $2 c_2 K < \nu$ può esse=

re indebolita.

Se $N>1$ un controesempio di Frehse ([Q]) mostra che le condizione $c_2 K < \nu$ è necessaria anche per i sistemi ellittici quasi lineari con parte principale lineare.

Proviamo, ora, il risultato di parziale holderianità per la soluzione u.

<u>TEOREMA 6.3</u>. Se $u \in H^1 \cap L^\infty(\Omega, R^N)$ è soluzione del sistema (6.1) e sono soddisfatte le ipotesi del lemma 6.1, allora u è parzialmente holderiana in Ω.

Inoltre se il sistema (6.1) è quasi lineare, allora, detto Ω_o l' insieme di singolarità di u, risulta

$$H_{n-p}(\Omega_o) = 0 \tag{6.11}$$

ove p è definito come nell' enunciato del teorema 6.2.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $u \in H^1 \cap L^\infty(\Omega, R^N)$ soluzione del sistema (6.1). Poniamo

$$A_{ij} = A_{ij}^{hk} \qquad A_{ij}^{hk} = \int_0^1 \frac{\partial a_j^i}{\partial p_k} (x,u,tp)\, dt \qquad \text{per ogni } i,j=1,\dots n \ h,k=1,\dots N.$$

Essendo le derivate $\frac{\partial a_j^i}{\partial p_k}$ uniformemente continue e limitate, esiste una funzione $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, concava, non decrescente, tale che $\omega(0)=0$ e risulti

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \| A_{ij}(x,u,p) - A_{ij}(x_o,v,q) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega\, (\|x - x_o\|^2 + \|u - v\|^2 + \|p - q\|^2)$$

da cui segue

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \| A_{ij}(x_o, u_{B(2r)}, (Du)_{B(2r)}) - A_{ij}(x,u,Du) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tag{6.12}$$
$$\leq \omega\, (r^2 + \|u - u_{B(2r)}\|^2 + \|Du - (Du)_{B(2r)}\|^2)$$

Pertanto dalle maggiorazioni (6.10) e (6.12) e dalle ipotesi considerate sui coefficienti, analogamente al caso $n>4$ del teorema 5.14, segue che esiste un sottoinsieme Ω_o, chiuso in Ω, di misura nulla e tale che

$$u \in C^{o,\gamma}(\Omega - \Omega_o)$$

per un opportuno $\gamma \in (0,1)$.

Esaminiamo, ora, il caso in cui il sistema (6.1) sia quasi lineare. In tali ipotesi il sistema è del tipo

$$(6.13)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}(x,u)D_j u) = \sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,u) - a^o(x,u,Du)$$

e verifica le seguenti ipotesi

$$(6.14)\qquad \|a^i(x,u)\| \leqslant c_1(K) \qquad \text{per ogni } (x,u) \quad xR^N$$

$$(6.15)\qquad \|a^o(x,u,Du)\| \leqslant c_2(K)(1+\|Du\|^2) \qquad \text{per ogni } (x,u,p)\in\Lambda$$

$$(6.16)\qquad \|A_{ij}(x,u)\| \leqslant c_3(K) \qquad \text{per ogni } (x,u)\in\Omega x R^N, \text{ per ogni } i,j=1,\dots n.$$

Dall' ipotesi (6.8) segue che esiste una funzione ω: $[0,\infty)\to[0,\infty)$ non decrescente, concava, continua, con $\omega(0)=0$ tale che

$$(6.17)\qquad \left(\sum_{ij} \|A_{ij}(x,u) - A_{ij}(y,v)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \omega(\|x-y\|^2 + \|u-v\|^2).$$

Poniamo

$$A^o_{ij} = A_{ij}(x_o,u_{B(r)}) \qquad \text{per ogni } i,j=1,\dots n$$

ove $B(r) \subset\subset \Omega$ è una sfera di raggio $r\leqslant 1$ e $x_o\in\Omega$.

Siano v,w soluzioni dei seguenti problemi di Dirichlet

$$(6.18)\quad \begin{cases} v - u \in H^1_o(B(r),R^N) \\ \displaystyle\sum_{ij}\int_{B(r)} (A^o_{ij} D_j v \mid D_i\varphi)\, dx = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi\in H^1_o(B(r),R^N) \end{cases}$$

$$(6.19)\quad \begin{cases} w \in H^1_o(B(r),R^N) \\ \displaystyle\sum_{ij}\int_{B(r)} (A^o_{ij} D_j w \mid D_i\varphi)\, dx = \sum_{ij}\int_{B(r)} (A^o_{ij}-A_{ij}(x,u)\, D_i u \mid D_j\varphi)\, dx + \\ \displaystyle + \int_{B(r)} \sum_i (a^i \mid D_i\varphi)\, dx + \int_{B(r)} (a^o \mid \varphi)\, dx \qquad \text{per ogni } \varphi\in H^1_o(B(r),R^N) \end{cases}$$

Per un noto teorema di [14], essendo v soluzione del sistema lineare a coefficienti costanti (6.18) segue che v è unica ed inoltre

$$(6.20)\qquad \sup\{\|v(x)\| : x\in B(r)\} \leqslant c\, K$$

(ricordando che $K = \sup\{\|u(x)\| : x\in\Omega\}$)

Essendo $u = v+w$ dalla (6.20) segue

(6.21) $\quad \|w\|_{L^\infty(B(r))} \leqslant (1+c)\, K$

e quindi il sistema (6.19) è risolto per ogni $\varphi \in H^1_o \cap L^\infty(B(r),R^N)$.

Pertanto, con un procedimento analogo a quello seguito nella dimostrazione del teorema 5.14, nel caso $n \leqslant 4$, dalle (6.10),(6.17),(6.20) e (6.21) segue la tesi. □

Osserviamo che il teorema precedente fornisce una stima della misura di Hausdorff dell' insieme singolare Ω_o solamente nel caso di un sistema quasi lineare. Tuttavia, essendo in corso ricerche in questo campo, è probabile che si possa giungere, in futuro, a una risposta (positiva o negativa) del proble= ma sopra evidenziato.

b) <u>differenziabilità della soluzione.</u>

Consideriamo il sistema non lineare fortemente ellittico

(6.22) $\quad \sum_{i=1}^{n} a^i(x,u,Du) = a^o(x,u,Du)$

e supponiamo che i coefficienti siano ad andamento quadratico nel gradiente, ossia verifichino le ipotesi (6.3) e (6.5).

Proviamo un teorema di differenziabilità per soluzioni di sistemi ad andamenti quadratici, ottenendo un risultato simile a quello provato nel caso di soluzio= ni di sistemi ad andamenti controllati. Le dimostrazioni sono analoghe a quelle riportate nel capitolo precedente, per cui mettiamo in evidenza solamente i passaggi più significativi.

<u>TEOREMA 6.4 ([Q])</u>. Se $u \in H^1 \cap L^\infty(\Omega,R^N)$ è una soluzione del sistema (6.22), cioè

(6.23) $\quad \sum_i (a^i(x,u,Du) \mid D_i\varphi)\, dx + (a^o(x,u,Du) \mid \varphi)\, dx = 0$

per ogni $\varphi \in H^1_o \cap L^\infty(\Omega,R^N)$

ed inoltre risulta

(6.24) per ogni $i=1,\dots n$ e per ogni $(x,u,p) \in \Lambda$ tale che $\|u\| \leqslant K$

$$\| a^i \| + \sum_{s=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial x_s} \right\| + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial u_k} \right\| \leq c(K)\ V(p)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} \right\| \leq c(K)$$

(6.25) per ogni $(x,u,p)\in\Lambda$ tale che $\|u\|\leq K$

$$\| a^o \| + \sum_{s=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^o}{\partial x_s} \right\| + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial a^o}{\partial u_k} \right\| \leq c(K)\ V^2(p)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^o}{\partial p_k^j} \right\| \leq c(K)\ V(p)$$

allora $u\in H^2_{loc}(\Omega,R^N)$ e per ogni coppia di sfere concentriche $B(\rho)\subset\subset B(r)\subset\Omega$

con r sufficientemente piccolo, si ha la maggiorazione

$$(6.26)\qquad |u|^2_{H^2(B(\rho))} \leq c\{\ 1 + |u|^2_{H^1(B(r))}\}$$

ove c diverge per $(r-\rho)\to 0$.

<u>Dimostrazione.</u> Essendo $u\in C^{o,\gamma}(\Omega,R^N)$ si ha la maggiorazione

$$(6.27)\qquad \|u - u_{B(r)}\| \leq r^{\gamma}\ \|u\|_{C^{o,\gamma}}$$

da cui, con un procedimento assai simile a quello seguito nella dimostrazione

del lemma 5.9 si prova

$$(6.28)\qquad \int_{B(r)} \|\varphi\|^2 \sum_i \|D_i u\|^2\,dx \leq c\ r^{2\gamma} \int_{B(r)} \sum_i \|D_i\varphi\|^2\,dx + c\int_{B(r)} \|\varphi\|^2\,dx$$

per ogni $\varphi\in C_o^{\infty}(B(r),R^N)$ e quindi per ogni $\varphi\in H_o^1\cap L^{\infty}(\Omega,R^N)$.

Siano $\vartheta\in C_o^{\infty}(\Omega)$, $0\leq\vartheta\leq 1$, $\vartheta=1$ in $B(\rho)$, $\vartheta=0$ in $R^n - B(r)$ e $\tau_{s,h}u = u(x+he^s)-u(x)$

ove $|h|<(r-\rho)/4$.

Allora se s e h sono sufficientemente piccoli, analogamente al teorema 5.15,

dalle ipotesi (6.3),(6.5),(6.24),(6.25) e dalla forte ellitticità, segue

$$(6.29)\qquad \int_{B(r)} \vartheta^2 \sum_i \|\tau_{s,h} D_i u\|^2\,dx \leq$$

$$\leq c\ |h|^2\{\ 1+|u|^2_{H^1(B(\rho))}\} + c\int_{B(r)} \|\vartheta\ \tau_{s,h}u\|^2 \sum_i \|D_i u\|^2\,dx$$

Posto $\varphi=\vartheta\tau_{s,h}u$ dalla (6.28) otteniamo

$$(6.30)\quad \int_{B(r)} \|\vartheta\, \tau_{s,h} u\|^2 \sum_i \|D_i u\|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\, r^{2\gamma} \int_{B(r)} \sum_i \|D_i (\vartheta \tau_{s,h} u)\|^2\, dx + c \int_{B(r)} \|\tau_{s,h} u\|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\, r^{2\gamma} \int_{B(r)} \vartheta^2 \sum_i \|\tau_{s,h} D_i u\|^2\, dx + c(r,\rho) \int_{B(r)} \|\tau_{s,h} u\|^2\, dx.$$

Pertanto dal lemma 4.1 e dalle maggiorazioni (6.29) e (6.30) segue

$$\int_{B(r)} \vartheta^2 \sum_i \|\tau_{s,h} D_i u\|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\, |h|^2 \{ 1 + |u|^2_{H^1(B(\rho))} \} + c\, r^{2\gamma} \int_{B(r)} \vartheta^2 \sum_i \|\tau_{s,h} D_i u\|^2\, dx + c(r,\rho) |h|^2 \int_{B(r)} \|D_s u\|^2\, dx$$

da cui, scelto r sufficientemente piccolo, si ha

$$\int_{B(r)} \vartheta^2 \sum_i \|\tau_{s,h} D_i u\|^2\, dx \leqslant c\, |h|^2 \{ 1 + |u|^2_{H^1(B(r))} \}.$$

Essendo $\vartheta=1$ su $B(\rho)$, segue

$$\int_{B(\rho)} \sum_i \|\tau_{s,h} D_i u\|^2\, dx \leqslant c\, |h|^2 \{ 1 + |u|^2_{H^1(B(r))} \}$$

da cui, per il lemma 4.2, si conclude

$$|u|^2_{H^2(B(\rho))} \leqslant c\, \{ 1 + |u|^2_{H^1(B(r))} \}.$$

c) <u>holderianità del gradiente.</u>

Consideriamo il sistema non lineare fotemente ellittico (6.22) e supponiamo che i coefficienti verifichino le ipotesi (6.3),(6.5),(6.24) e (6.25). Dal teorema 6.4 segue $u \in H^2_{loc}(\Omega, R^N)$.

Sostituendo, nella (6.23), $\varphi = D_s v$ con $1 \leqslant s \leqslant n$ e $v \in C_o(\Omega, R^N)$, si ottiene

$$(6.31)\quad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x,u,Du) D_{js} u \mid D_i v)\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n (F_{is}(x,u,Du) \mid D_i v)\, dx$$

ove A_{ij} sono matrici NxN e F_{is} sono vettori di R^N definiti nel modo seguente

$$(6.32)\quad A^{hk}_{ij} = \frac{\partial a^i_h}{\partial p^j_k} \qquad F_{is} = -\left(\frac{\partial a^i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial a^i}{\partial u_k} p^s_k + \delta_{is} a^o \right).$$

Ponendo $v=D_r\psi$ con $1\leq r\leq n$ e $\psi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$, u è soluzione del seguente sistema fortemente ellittico

$$(6.33)\qquad \int_\Omega \sum_{ijrs=1}^{n}(B_{ir,js}D_{js}u \mid D_{ir}\psi)\,dx = \int_\Omega \sum_{ir=1}^{n}(F_{ir} \mid D_{ir}\psi)\,dx$$
$$\text{per ogni } \psi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$$

ove

$$B_{ir,js} = \delta_{rs}A_{ij}$$

sono matrici NxN e F_{ir} sono definiti come in (6.32).

Il sistema (6.33) è ancora un sistema di quarto ordine,non lineare,fortemente ellittico e ad andamenti quadratici. In [5] è provato che esiste un insieme Ω_o, chiuso in Ω, tale che

$$D_iu\in C^{o,\delta}(\Omega-\Omega_o,R^N) \qquad\qquad \text{per ogni } \psi\in(0,1)$$

e

$$H_{n-q}(\Omega_o) = 0 \qquad\qquad \text{per un } q>2.$$

Più precisamente si dimostra il seguente teorema per i sistemi quasi lineari

<u>TEOREMA 6.5 ([5] e [Q])</u>. Sia $u\in H^2\cap C^{o,\lambda}(\Omega,R^N)$ una soluzione del sistema quasi lineare

$$(6.34)\quad \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=2}(B_{\alpha\beta}(x,u,Du)D^\beta u \mid D^\alpha\varphi)\,dx=\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 2}(a^\alpha(x,u,Du) \mid D^\alpha\varphi)\,dx$$

$$\text{per ogni } \varphi\in C_o^\infty(\Omega,R^N)$$

dove $B_{\alpha\beta}(x,u,p)$ sono matrici NxN, uniformemente continue e limitate in Ω, fortemente ellittiche e $a^\alpha(x,u,p)$ sono vettori di R^N, continui in Λ, tali che

$$(6.35)\qquad \|a^\alpha(x,u,p)\| \leq c\,V^2(u,p)$$

allora le derivate D_ju, con j=1,...n sono parzialmente holderiane in Ω e, detto Ω_o l' insieme singolare si ha

$$(6.36)\qquad H_{n-q}(\Omega_o) = 0 \qquad\qquad \text{per qualche } q>2.$$

In particolare Ω_o è vuoto se n=2.

Quindi il teorema 6.5 permette di provare una regolarità maggiore delle soluzioni del sistema (6.22) in quanto tale regolarità segue dalla teoria dei sistemi lineari di quarto ordine e a coefficienti regolari.

Inoltre, supposto $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}, R^N)$ con $\gamma \in (0,1)$, il sistema (6.31) si può vedere, anche, come un sistema fortemente ellittico del secondo ordine, nel vettore $U=Du$, con i coefficienti che dipendono da x, u e U.

Pertanto il sistema (6.22) può essere visto anche come un sistema quasi lineare del 2° ordine e a coefficienti regolari, nel vettore $U=Du$, e, quindi, ad esso è applicabile il teorema 6.3, che, in tal modo, fornisce una dimostrazione alternativa della regolarità del vettore Du.

BIBLIOGRAFIA

1] S.AGMON - Lectures on elliptic boundary value problems. - Van Nostrand (1965).

2] S.CAMPANATO - Proprietà di una famiglia di spazi funzionali.- Ann. S.N.S. Pisa, 17 (1963), pp. 175-188.

3] S.CAMPANATO - Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi $\mathcal{L}^{2,\lambda}$.- Ann. Mat. Pura Appl.,69 (1965), pp. 321-382.

4] S.CAMPANATO - Su un teorema di interpolazione di G. Stampacchia.- Ann. S.N.S. Pisa, 20 (1966), pp. 649-652.

5] S.CAMPANATO - Partial Holder Continuity of the Gradient og Solutions of Some Nonlinear Elliptic Systems. - Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,59 (1978), pp.147-165

6] S.CAMPANATO - Risultati di regolarità per soluzioni di sistemi ellittici. Conferenza al VI Congresso G.M.E.L. Luxembourg (1981), Gauthier - Villars.

7] S.CAMPANATO - Sistemi ellittici. Dispense Istituto Nazionale di Alta Matematica a.a. 1981-1982.

8] S.CAMPANATO - Regolarità holderiana parziale delle soluzioni di una classe di sistemi ellittici non lineari del 2° ordine.- Conferenze del Seminario di Matematica dell' Univ. di Bari, n. 181 (1982).

9] S.CAMPANATO - Differentiability of the Solutions of Nonlinear Elliptic Systems with Natural Growth. Ann. Mat. Pura Appl.,131 (1982), pp. 75-106.

10] S.CAMPANATO - Risultati di regolarità e parziale regolarità per soluzioni di sistemi ellittici.- Raccolta di seminari del Dip. di Matematica dell' Univ. della Calabria, n.2 (1983).

11] S.CAMPANATO - Recent Regularity Results for $H^{1,q}$-Solutions of Non-Linear Elliptic Systems.- Conferenze del Seminario di Matematica dell' Univ. di Bari n.186 (1983)

[12] S.CAMPANATO. Holder Continuity of the Solutions of Some Non-Linear Elliptic Systems.-Advances in Mathematics, 48(1983) pp. 16-43.

[13] S.CAMPANATO - P.CANNARSA.Differentiability and Partial Holder Continuity of the Solutions of Non-Linear Elliptic Systems of Order 2m with Quadratic Growth -Ann. Mat. Pura Appl.,131(1982) pp.75-106.

[14] A.CANFORA. Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza per il pro= blema di Dirichlet relativo ai sistemi fortemente ellittici.-Ricerche Mat.,15(1966) pp.249-294.

[15] E.DE GIORGI. Sulla differenziabilità e l' analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.-Mem.Acc. Sci.Torino (1957) pp.25-43.

[16] M.GIAQUINTA - G.MODICA. Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems.- J.Reine Angew. Math.(1979)pp.145-169.

[17] E.GIUSTI. Sulla regolarità delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche.-Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39(1967) pp.362-375.

[18] E.GIUSTI. Regolarità parziale delle soluzioni di sitemi ellittici quasi-lineari di ordine arbitrario.-Ann.S.N.S. Pisa 23(1969) pp.115-142.

[19] E.GIUSTI. Precisazione delle funzioni di $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari.-B.U.M.I.,2(1969) pp.71-76.

[20] F.JOHN - L.NIRENBERG. On functions of bounded mean osillation.-Comm. Pure Appl. Math.,14(1961) pp.415-426.

[21] O.A.LADYZENSKAYA - N.N.URAL'CEVA. Linear and quasilinear elliptic equations. Academic Press 1968.

[22] C.B.MORREY. Multiple integrals in the calculus of variations.- Springer 1966.

[23] C.B.MORREY. Partial regularity results for nonlinear systems.-Math. and Mech. (1968) pp.649-670.

[24] J.NECAS - J.STARA. Principio di massimo per i sistemi ellittici quasi lineari non diagonali.- B.U.M.I.,6(1972) pp.1- 10.

[25] L.C.PICCININI. Proprietà di inclusione e interpolazione tra spazi di Morrey e loro generalizzazioni. Pisa(1969).

[26] G.STAMPACCHIA. The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation,- Ann. S.N.S. Pisa, 19(1965) pp. 443-462.

[27] S.CAMPANATO. Regolarità di sistemi parabolici. Dispense S.I.S.S.A. a.a. 1983-'84 (in corso di stampa).

[Q] S.CAMPANATO . Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarità all' in= terno. Quaderni S.N.S.Pisa(1980).

INDICE