ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

DI

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE E MULTIVOCHE IN SPAZI DI DIMENSIONE INFINITA

CANDIDATA:

Dott.ssa Elvira MIRENGHI

RELATORE:

Chiar.mo Prof.Arrigo CELLINA

Anno Accademico 1981/1982

TRIESTE

SISSA - SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE I STUDI AVANZATI

TRIESTE

Strada Costiera 11

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

DI

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE E MULTIVOCHE IN SPAZI DI DIMENSIONE INFINITA

CANDIDATA:
Dott.ssa Elvira MIRENGHI

RELATORE:
Chiar.mo Prof.Arrigo CELLINA

S O M M A R I O:

Esistenza di soluzioni per una equazione differenziale in uno spazio di Banach

Esistenza di soluzioni per una inclusione differenziale in uno spazio di Banach

ESISTENZA DI SOLUZIONI PER UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN UNO SPAZIO DI BANACH

§ 1. INTRODUZIONE

Sia X uno spazio di Banach e consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

La sola ipotesi di continuità per la f a secondo membro non è sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione dell'equazione differenziale (1.1) quando la dimensione dello spazio è infinita, come si può vedere da numerosi controesempi (cfr. [9]). Tale cattiva proprietà di esistenza di soluzioni per le equazioni differenziali in spazi di Banach, non è legata al tipo di spazio di Banach considerato e Lasota e Yorke l'hanno evidenziato in un loro lavoro del 1973, costruendo un controesempio in uno spazio che è addirittura di Hilbert.

Piuttosto, essa deriva dal fatto che la sfera unitarià di uno spazio a dimensione infinita, non è necessariamente compatta.

Molti matematici come Lasota e Yorke [24], Vidossich [39], De Blasi e Myjak[16], hanno studiato che tipo di proprietà fosse quella di non-esistenza di una soluzione per la (1.1) e sono giunti alla conclusione che le f continue e uniformemente limitate per cui la (1.1) non ammette soluzione, sono in un certo senso "poche". Il seguente risultato è quello stabilito da Lasota e Yorke:

- Sia X uno spazio di Banach ed U un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times X$ contenente (to,xo); denotiamo con M la sfera unitaria dello spazio $\mathcal{C}(U,X)$ delle funzioni continue e limitate e con r la metrica indotta da quella della topologia della convergenza uniforme. Supponiamo inoltre che $a > 0$ sia tale per ogni $f \in M$, localmente lipschitziana, il problema (1.1) ha una soluzione almeno in [to, to+a]: tale a esiste certamente perchè se $f \in M$ è lipschitziana, si può ripetere senza alcuna difficoltà il teorema di esistenza ed unicità di Picard della dimensione finita. Allora sussiste il seguente teorema:

Teorema 1.1. Denotiamo con N l'insieme di tutte le $f \in M$ per le quali il problema di Cauchy (1.1) non ammette soluzioni in $[t_o, t_o+a]$: N risulta un insieme magro nello spazio (M,r).

Abbiamo già osservato che il teorema di esistenza di Picard con f lipschitziana, continua a sussistere negli spazi a dimensione infinita, e questo perchè la dimostrazione sfrutta il metodo delle approssimazioni successive e non proprietà di precompattezza degli insiemi limitati. Per generalizzare il teorema di Peano, si sono invece prese due strade diverse: da un lato si è dimostrata l'esistenza di una soluzione della (1.1) con delle ipotesi di precompattezza sul condominio della f, in aggiunta alla continuità; dall'altro si sono fatte ipotesi di monotonia per la f. Si è visto infatti che se X è di Hilbert ed f è dissipativa, cioè esiste $M > 0$ tale che

$$\mathrm{Re} < f(t,x) - f(t,y),\ x+y > \leq M\|x-y\|^2 \quad \text{per ogni } (t,x),(t,y) \text{ in } [t_o, t_o+\alpha] \times X$$

allora esiste una soluzione del problema (1.1). Partendo da questi due risultati, che possiamo definire classici, si sono sviluppati due filoni diversi: il primo sfrutta le proprietà di compattezza della f mediante l'uso dell'indice di Kuratowki, l'altro sfrutta le proprietà di monotonia della f con l'uso delle funzioni di Liapunov.

§ 2. CASO DELLA COMPATTEZZA

Preliminarmente diamo le seguenti definizioni:

Def. 2.1 Sia A un insieme limitato. Si dice indice di non-compattezza di di Kuratowski di A, il seguente numero reale non negativo:

$\alpha(A) = \inf\{\ \delta$: esiste un ricprimento finito $(U_i)_{i\in I}$ tale che diam $U_i \leq \delta$ per ogni $i \in I\ \}$

Def.2.2 Sia I intervallo compatto di $\mathbb{R}$ ed $f : I\times X \to X$ continua.

Diremo che f è α-lipschitziana se esiste $L > 0$ tale che per ogni sottoinsieme limitato S di X risulta:

$$\alpha(f(I\times S)) \leq L\alpha(S)$$

Il primo risultato di esistenza di una soluzione della (1.1) che facesse uso dell'indice di Kuratowski e non sfruttasse ipotesi di uniforme continuità, è dovuto ad un lavoro di Szufla del 1968 [36] nel quale si generalizza un precedente risultato di Ambrosetti [1] . Il teorema di Szufla è il seguente:

Teorema 2.3 Sia $R = [to,to+a] \times B_b(xo)$ un rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ e supponiamo che $f:R \to X$ sia ivi α-lipschitziana e limitata da una costante $M > 0$. Allora il problema (1.1) ammette una soluzione nell'intervallo $[to,to+T]$, essendo $T \leq \min\{a,b/M\}$.

Osservazione 2.4 Il teorema 2.3 è una generalizzazione del teorema di esistenza di una soluzione per una funzione lipschitziana perchè una tale funzione è anche banalmente α-lipschitziana. Inoltre esso generalizza anche il caso di f continua a codominio precompatto, perchè se il codominio di f è contenuto in un compatto, per ogni insieme limitato S di X, si ha $\alpha(f(IxS))=0$ e quindi f è α-lipschitziana. Osserviamo che il teorema 2.3 si può applicare anche quando f è somma di una funzione compatta, cioè avente codominio precompatto, f_1 è di una funzione α-lipschitziana f_2 . In questo caso infatti, per ogni insieme limitato S di X risulta:

$$\alpha(f(IxS)) = \alpha(f_1(IxS) + f_2(IxS)) \leq \alpha(f_1(IxS)) + \alpha(f_2(IxS)) \leq$$
$$\leq \alpha(f_2(IxS)) \leq L\alpha(S)$$

cioè f è ancora α-lipschitziana.

Oltre a Szulfa anche altri matematici si sono interessati allo stesso problema, ottenendo risultati più o meno equivalenti, come ad esempio Rzymoski nel 1971 [34] ; un risultato più generale ottenuto indipendentemente da quello di Szufla, è quello di Cellina del 1971 [7], nel quale si stabilisce un teorema di esistenza di una soluzione facendo sulla f delle ipotesi simili a quelle che precedentemente, erano servite ad Osgood per avere l'unicità:

- Sia $R = [to,to+a] \times B_b(xo)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ ed $f:R \to X$.

  Poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$

  $L(\varepsilon) = \sup\{\alpha(f(IxS))/\alpha(S) : S \subset B_b(xo),\ \alpha(S) \geq \varepsilon\}$

  Essendo $I = [to, to+a]$, allora sussiste il teorema:

Teorema 2.5 Se f è continua nel rettangolo R ed ivi limitata da M e se inoltre risulta

$$\int_{0^+} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon L(\varepsilon)} = \infty$$

allora il problema (1.1) ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[to, to+T]$, dove $T \leq \min\{a, b/M\}$.

Osservazione 2.6 Il teorema 2.5 generalizza il teorema 2.3 perchè, infatti se f è α-lipschitziana, risulta che per ogni sottoinsieme limitato S di X, si ha

$$\frac{\alpha(f(I x S))}{\alpha(S)} \leq L$$

e perciò per ogni $\varepsilon > 0$, $L(\varepsilon) \leq L$ e quindi

$$\int_{0^+} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon L(\varepsilon)} = \infty$$

Gli sviluppi successivi di questo filone, si sono avuti con le funzioni di tipo Kamke che erano già state usate per provare teoremi di esistenza nell'ipotesi di uniforme continuità per la f (cfr. [22], [25]). Il primo a richiedere solo la continuità per la f è stato Pianigiani nel 1975 [31], il quale ha stabilito il seguente risultato.

- Sia $\omega : [0,a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione di tipo Kamke cioè verificante le seguenti proprietà:
  - (a) $\omega(t,\cdot)$ è continua per ogni t fissato;
  - (b) $\omega(\cdot,u)$ è misurabile per ogni u fissato;
  - (c) $\omega(t,0) = 0$;
  - (d) l'unica soluzione continua della disuguaglianza $u(r) \leq \int_0^t \omega(s,u(s))ds$ soddisfacente alla condizione $\lim_{t\to 0} u(t)/t = \lim_{t\to 0} u(t) = 0$ è $u(t) \equiv 0$
- Sia $R = [0,a] \times B_b(xo)$ rettangolo di $\mathbb{R} x X$; sussiste il seguente teorema:

Teorema 2.7 Se $f: R \to X$ verifica le seguenti condizioni:

(i) $f(\cdot, x)$ è misurabile per ogni x fissato;

(ii) $f(t,\cdot)$ è continua per ogni t fissato;

(iii) $\|F(t,x)\| \leq M$:

(iv) per ogni sottoinsieme S di $B_b(x_o)$ e per quasi ogni $t \in [0,T]$ con $T = \min\{a, b/M\}$, risulta:

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(f(I_{t,\delta} \times S)) \leq \omega(t, \alpha(S))$$

essendo $I_{t,\delta} = (t-\delta, t+\delta)$;

Allora esiste almeno una soluzione del problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$ definita in $[0,T]$.

Osservazione 2.8 Il teorema 2.5 si ottiene da questo prendendo $\omega(t,u) = uL(u)$ con $\int_{0^+} du/uL(u) = \infty$ ed essendo $L(u)$ la funzione definita nel teorema 2.5. Anche il teorema 2.3 si può dedurre direttamente da questo, prendendo $\omega(t,u) = Ku$ con $K \geq 0$.

Successivamente anche Szufla [37], ha affrontato il problema dell'esistenza di una soluzione per la (1.1) mediante l'uso delle funzioni di Kamke. Il suo risultato del 1978, contiene vari criteri di esistenza per la (1.1) tra cui una generalizzazione del teorema 2.7 ottenuta con un metodo diverso. Il risultato è il seguente:

- Sia $\omega : [0,d] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ con $d < a$ una funzione di tipo Kamke, verificante le seguenti proprietà

  (a) $\omega(t,\cdot)$ continua per ogni t fissato;

  (b) $\omega(\cdot, u)$ misurabile per ogni u fissato;

  (c) $\omega(t,0) = 0$

  (d) l'unica funzione assolutamente continua in $[0,d]$ che soddisfa alla disuguaglianza $u'(t) \leq \omega(t,u(t))$ quasi ovunque in $[0,d]$ e tale che $u(0) = 0$ è $u(t) \equiv 0$;

  sia $R = [0,a] \times B(xo)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ e sia $m: [0,a] \to \mathbb{R}_+$ una funzione integrabile tale che $\int_0^d m(s)\, ds \leq b$, essendo d lo stesso di cui sopra;

  allora sussiste il seguente teorema:

Teorema 2.9 Sia $f:R \to X$ verificante le seguenti ipotesi:

(i) $f(t,\cdot)$ è continua per ogni fissato t;

(ii) $f(\cdot,x)$ è misurabile per ogni fissato x;

(iii) $\|f(t,x)\| \leq m(t)$ per ogni $(t,x) \in R$;

(iv) per ogni sottoinsieme S di $B_b(xo)$ e per quasi tutti i $t \in [0,d]$, risulta

$$\lim_{r \to 0} \alpha(f([t,t+r] \times S)) \leq \omega(t, \alpha(S))$$

Allora esiste almeno una soluzione del problema (1.1) di punto iniziale $(0,xo)$, definita in $[0,d]$.

Osservazione 2.10 Il teorema 2.9 generalizza il teorema 2.7. Infatti alla funzione di Kamke del teorema 2.9 non è richiesto di essere infinitesima nell'origine di ordine maggiore o uguale ad uno, inoltre la (iii) del teorema 2.9 è verificata banalmente per $m(t) \equiv M$ per ogni t.

Se la funzione f che compare nel teorema 2.9 è continua, si possono ottenere risultati più forti;

- Supponiamo che la funzione di Kamke verifichi le condizioni (a) e (b) del teorema 2.9 e le seguenti:
  (c') per ogni insieme limitato Z di $[0,d] \times \mathbb{R}_+$, esiste una funzione m_Z definita in $(0,d]$ e integrabile in $[c,d]$ per ogni $c > 0$ piccolo, tale che $\omega(t,u) \leq m_Z(t)$ per ogni $(t,u) \in Z$;
  (d') per ogni $c \in (0,d)$, la funzione identicamente nulla è l'unica funzione assolutamente continua in $[0,c]$ che soddisfi alla relazione $u'(t) = \omega(t,u(t))$ quasi ovunque in $[0,c]$ e tale che $D_+u(0) = u(0) = 0$

Teorema 2.11 Se la funzione f è continua e limitata nel rettangolo $R = [0,a] \times B_b(xo)$, $a > d$, e se, per ogni sottoinsieme S di $B_b(xo)$ e per quasi ogni $t \in [0, d]$, risulta

$$\lim_{r \to 0} \alpha(f([t, t+r] \times S)) \leq \omega(t, \alpha(S))$$

allora esiste almeno una soluzione definita in $[0,d]$, del problema (1.1) di punto iniziale $(0,xo)$

Teorema 2.12 Nelle ipotesi del teorema 2.11, se $d \leq 1$ e se risulta

$$\lim_{r\to 0^+} \alpha(f([t,t+r] \times S)) \leq \alpha(S)/t \quad \text{per ogni } t \in [0,d] \text{ e } S \subset B_b(xo)$$

$$\lim_{r\to 0^+} \alpha(f([t,t+r] \times S)) = o(e^{-1/t}/t^2) \quad \text{per } t \to 0^+ \text{ uniformemente e per } S \subset B_b(xo);$$

allora esiste una soluzione del problema (1.1) di punto iniziale (0,xo),

Teorema 2.13 Con le notazioni dei teoremi precedenti, sia $f: R \to X$ continua e limitata; siano verificate inoltre le seguenti condizioni:

(i) supponiamo di avere una funzione $\omega(t,\delta)$ tale che per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo $t \to \omega(t,\delta)$ sia continua e non decrescente in $\delta \leq t \leq d$;

(ii) sia $r \to g(r)$ una funzione continua e non decrescente per $r > 0$;

(ii) per ogni funzione $\delta \to q(\delta)$ infinitesima nell'origine, non c'è alcuna costante positiva k tale che la disuguaglianza

$$\int_{\varepsilon+\delta q(\delta)}^{\varepsilon+k} \frac{ds}{g(s)} \leq \omega(d,\delta) - \omega(\delta,\delta)$$

valga per ogni $\varepsilon, \delta \geq 0$.

Allora, se, per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, per quasi tutti i $t \in [\delta, d]$ e per ogni sottoinsieme S di $B_b(xo)$ risulta

$$\lim_{r\to 0} \alpha(f[t,t+r] \times S)) \leq \omega(t,\delta)\, g(\alpha(S))$$

il problema (1.1) di punto iniziale (0,xo), ha una soluzione definita in $[0,d]$

Osservazione 2.14 Il vantaggio dei teoremi 2.11, 2.12, 2.13 è quello di permetterci di considerare classi sempre più grandi di funzioni tipo Kamke. Per esempio la funzione $\omega(t,r) = r/t$ verifica le ipotesi del teorema 2.11, ma non quella del teorema 2.9. La funzione $\omega(t,r) = r/t^2$ non verifica le ipotesi del teorema 2.11, ma soddisfa quelle del teorema 2.12, mentre le funzioni

$\omega(t,r) = \delta\, t^{\delta-1} \sqrt{r}$ con $0 < \delta \leq t \leq d$

$\omega(t,r) = r^q/t^p$ con $0 < \delta \leq t \leq d$, $q > 1$, $0 \leq p \leq q$, $p \neq 1$

$\omega(t,r) = (e^r - 1)/e^r - 1$ con $0 < \delta \leq t \leq d$

verificano le ipotesi del teorema 2.13, ma non quelle dei teoremi precedenti.

Il teorema 2.9 è stato recentemente generalizzato da Ricceri[33], nel seguente modo:

- Sia $\omega : [to, to+d] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione verificante le seguenti condizioni:

  (a) per ogni $t \in [to, to+d]$ e per ogni $u, \varepsilon, \sigma \in \mathbb{R}_+$ non nulli esiste $\bar{u} \in]u, u+\sigma]$ tale che $\omega(t,\bar{u}) \leq \omega(t,u) + \varepsilon$;

  (b) l'unica funzione reale non negativa ed assolutamente continua in $[to, to+d]$ che si annulla in to e che soddisfa alla relazione $|u'(t)|$ è quella identicamente nulla in $[to, to+d]$

Indichiamo con R il solito rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ uguale a $[to, to+a] \times B_b(Xo)$ e supponiamo che il d di cui sopra, sia in $[o, a]$. Sia $m:[to, to+a] \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile tale che

$$\int_{t_o}^{to+d} m_c(t)\,dt \leq b$$

essendo $c \in \{0,1\}$ fissato ed $m_c(t) = m(t) \exp \left(c\int_{t_o}^{t} m(\tau)\,d\tau\right)$ per $t \in [to, to+a]$

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 2.15 Sia $f: R \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) $f(\cdot, x)$ è misurabile in $[to, to+a]$ per ogni x fissato;

(ii) $f(t, \cdot)$ è continua da $B_b(x_o)$ in X munito della topologia debole per ogni t fissato;

(iii) $\|f(t,x)\| \leq m(t)\,(1+c\|x-x_o\|)$ per ogni $(t,x) \in R$.

Supponiamo che esista un insieme $\Gamma \subset [to, to+d]$ di misura nulla ed un numero $\rho > 0$ tali che, per ogni fissato $t \in [to, to+d[- \Gamma$ e per ogni fissato $S \subset \{x \in X \mid \|x-x_o\| \leq \int_{t_o}^{t_o+d} m_c(\tau)\,d\tau\}$ verificante la relazione $0 < \alpha(S) < \rho$, esiste una funzione $A(h)$ definita in $]0, to+d-t]$, a valori nella famiglia dei sottoinsiemi misurabili di $[to, to+d]$ tale che:

(I) $A(h) \subset [t, t+h]$ per ogni $h \in]0, to+d-t]$

(II) $f(A(h) \times S)$ è un insieme limitato per ogni $h \in]0, to+d-t]$

(III) $\liminf_{h \to 0^+} h^{-1}\left[\mu(A(h))\,\alpha(f(A(h) \times S)) + 2\int_{[t,t+h]-A(h)} m_c(\tau)\,d\tau\right] \leq \omega(t, \alpha(S))$

Allora il problema (1.1) ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[to, to+d]$

<u>Osservazione</u> 2.16 Confrontando le ipotesi del teorema 2.9 e del teorema 2.15 è immediato osservare che quest'ultimo è più generale. La generalizzazione non è solo formale, ma reale; infatti è possibile costruire degli esempi, piuttosto elaborati, in verità, di funzioni che soddisfano le ipotesi del teorema 2.15 e non quelle del teorema 2.9 (cfr. [33]). Si intuisce che tra tali funzioni ci possono essere, ad esempio, alcune per le quali $f([t,t+h]\, x S)$ non è limitato. Un altro recentissimo risultato per le equazioni differenziali ordinarie negli spazi di Banach è dovuto a H.Mänch e G.F.von Harten [30]. Il tipo di risultato, così come i metodi usati, sono piuttosto diversi da quelli dei teoremi precedenti, anche se si sfruttano gli indici di non-compattezza. Si rifanno principalmente a precedenti studi di Deimling [19]. Oltre all'indice di Kuratowski si usa l'indice di Housdorff, così definito:

<u>Def</u>.2.17 Si definisce <u>indice di non compattezza di Housdorff</u> il seguente numero reale non negativo, definito per ogni insieme limitato di S di X:

$\beta(S) = \inf\{\ \varepsilon > 0 \mid$ S si può ricoprire con un numero finito di sfere di raggio $\varepsilon \}$

Osserviamo che risulta $\beta(S) \leq \alpha(S) \leq 2\beta(S)$, per ogni sottoinsieme S limitato di X. Introduciamo le ulteriori seguenti definizioni:

<u>Def.</u> 2.18 Uno spazio di Banach X si dice <u>debolmente compatto generato,</u> o più brevemente W.C.G., se esiste un insieme debolmente compatto $K \subset X$ tale che lo spazio lineare generato da K sia denso in X.

<u>Def.</u> 2.19 Una funzione $\omega : (0,a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ si dice di classe U se verifica le seguenti condizioni:

(i) $\omega(t,\rho)$ è misurabile in t_i per ogni fissato $\rho \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $\omega(t,\rho)$ è continua in ρ per ogni fissato $t \in (0,a]$;

(iii) per ogni $\rho_0 > 0$ e per ogni intervallo compatto $J_o \subset (0,a]$ esiste $h_o \in L'(J_o)$, tale che:

$|\omega(t,\rho)| \leq h_o(t)$ in $J_o\, x[0,\rho_0]$

(iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ ed una successione (t_i) con $t_i \to 0^+$, tali che la soluzione massimale ρ_i di $\rho' = \omega(t,\rho)$, $\rho(t_i) = \delta + t_i$ esiste in $[t_i, a]$ ed ivi soddisfi alla relazione $\rho_i(t) \leq \varepsilon$.

Osservazione 2.20 Ogni spazio riflessivo è W.C.G. e così pure tutti gli spazi separabili. Alla classe di funzioni U appartengono funzioni che verificano delle particolari condizioni che solitamente servono per provare l'unicità, come quella di Lipschitz, di Nagumo, di Osgood........

Con le notazioni delle definizioni precedenti, sussite il seguente teorema:

Teorema 2.21 Sia $R = [0,a] \times B_b(x_o)$, rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ ed $f: R \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) f è continua;

(ii) $\|f(t,x)\| \leq M$ per ogni $(t,x) \in R$;

(iii) esiste $\;:[0,a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tale che, per ogni $S \subset B_b(x_o)$ e per ogni $t \in [0,a]$, risulti:

$\gamma(f(t,S)) \leq \omega(t, \gamma(S))$

Allora il problema (1.1), di punto iniziale $(0,x_o)$, ha una soluzione in $[0,T]$ con $T \leq \min\{a, b/M\}$ nei seguenti due casi:

(I) se X è W.C.G., $\gamma = \beta$ e $\omega \in U$

(II) se X è qualunque, ma $\gamma = \alpha$ o $\gamma = \beta$ e $2\omega \in U$

§3. CASO DELLA DISSIPATIVITA'

Come abbiamo già osservato, se lo spazio è di Hilbert ed f è dissipativa, allora, esiste una soluzione del problema (1.1) e questa è addirittura unica. La questione dell'estenzione di questo risultato aveva una duplice difficoltà: alleggerire le ipotesi sulla f, ed allargare i risultati anche a spazi che fossero anche solo di Banach. ci sono perciò delle difficoltà nell'ordinare e confrontare i risultati stabiliti, a causa della loro eterogeneità. R.H. Martin ha stabilito molti risultati in questo campo: il seguente[28], risale al 1970 e affronta un problema di Cauchy autonomo. A tale scopo introduciamo alcune notazioni:

- Se X è uno spazio di Banach ed x e y due suoi elementi, denotiamo $F: X \to 2^{X^*}$ la multiapplicazione definita $F(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ e poniamo $(x,y)_+ = \sup\{\langle y^*, x\rangle, y^* \in F(y)\}$, $(x,y)_- = \inf\{\langle y^*, x\rangle, y^* \in F(y)\}$. Se $f: X \to X$, poniamo $D_\pm[x,y,f] =$

$= (f(x) - f(s), x-y)_{\pm}$ ed osserviamo che risulta $D_{\pm}[x,y,f] = \lim_{h \to 0^{\pm}} (\| x-y+h(f(x) - f(y)) \| / h$

- Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le sequenti condizioni:

(a) α è continua, $\alpha(0)=0$ e $\phi(t,0)=0$ per ogni $t \in [0,\infty)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale $y' = \alpha(y)$ tale che $\phi(0,0)=0$.

(b) per ogni $\rho > 0$ la soluzione massimale $\phi(\cdot,\rho)$ di $y' = \alpha(y)$ tale che $\phi(0,\rho) = \rho$, esiste in $[0,\infty)$.

Teorema 3.1 Supponiamo che α e ϕ verifichiamo le ipotesi (a) e (b) e che $f: X \to X$ verifichi le condizioni seguenti:

(i) f è continua in X;

(ii) $D_{-}[x,y,f] \leq \alpha(\| x-y \|)$ per ogni x e y in X.

Allora per ogni x_o di X esiste una soluzione del problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$.

Martin ha anche stabilito degli interessanti legami tra gli operatori non lineari del tipo considerato e i semigruppi, [29].

Teorema 3.2 Sia D un sottoinsieme chiuso di X, $f: D \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) $f: D \to X$ continua;

(ii) $\liminf_{h \to 0^+} d(x+h\, f(x), D)/h = 0$ in D;

(iii) esiste $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $D_{-}[x,y,f] \leq \omega \| x-y \|$, per tutti gli x e y in D.

Allora f è il generatore infinitesimale di un semigruppo non lineare $\{\mathcal{S}_f(t)\}$ tale che, per ogni $x_o \in D$, l'applicazione $t \to \mathcal{S}_f(t)x_o$ è l'unica soluzione in $[0,\infty)$ del problema di Cauchy (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$.

In un lavoro del 1972 scritto con Lovelady, Martin [27] esamina il caso non autonomo:

Teorema 3.3 Sia $f:[0,\infty) \times X \to X$ e $\rho:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che siano verificate le seguenti condizioni:

(i) f è continua;

(ii) $(f(t,x)-f(t,y),x-y) \leq \rho(t)\|x-y\|$ per ogni $(t,x,y) \in [0,\infty) \times X \times X$;

Allora per ogni $x_0 \in X$ c'è un'unica soluzione del problema (1.1) di punto iniziale$(0,x_0)$, definita in tutto $[0,\infty)$.

Questo tipo di problema è stato studiato anche da altri matematici; il risultato seguente è dovuto a Vidossich [40], nella versione che ne ha dato Deimling nel suo libro del 1977 [19]:

- Denotiamo con U^* la classe di tutte le funzioni $\omega:(0,a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. verificanti la seguente proprietà:

  (a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, una successione $t_i \to 0^+$ ed una successione di funzioni continue $\rho_i:[t_i,a] \to \mathbb{R}_+$ tali che:

  (i) $\rho_i(t_i) \geq \delta\, t_i$, $D^- \rho_i(t) > \omega(t,\rho_i(t))$ $0 < \rho_i(t) \leq \varepsilon$ in $(t_i,a]$;

  (ii) $D^-\rho_i(t) \geq \omega(t,\rho_i(t)) + \delta_i$ per qualche $\delta_i > a$

Teorema 3.4 Sia $R = [0,a] \times B_b(x_0)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ ed $f:R \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) f continua;

(ii) $\|f(t,x)\| \leq M$ per ogni $(t,x) \in R$;

(iii) $(f(t,x)-f(t,y),x-y)_- \leq \omega(t,\|x-y\|)\|x-y\|$, per ogni (t,x), $(t,y) \in R$ e con $\omega \in U^*$

allora,se $T \leq \min\{a,b/M\}$ il problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_0)$ ha una unica soluzione in $[0,T]$.

Osservazione 3.5 La classe di funzioni U^* è una classe di unicità, come quella introdotta nella definizione 2.19. Ad essa appartengono le funzioni che verificano la condizione di Lipschitz, di Nagumo ecc..... La proprietà (a)-(i) è strettamente legata all'unicità della soluzione, mentre la (a)-(ii) è legata all'esistenza della soluzione.

I teoremi precedenti valgono in ogni spazio di Banach, anche se complesso se si si fanno le opportune modifiche nel semiprodotto scalare interno. Se lo spazio è a duale uniformemente convesso, sussiste un risultato del 1972 di Cellina [8], nel quale si dimostra un teorema di esistenza per perturbazioni compatte di trasformazioni dissipative, l'analogo del teorema 2.3 di esistenza di una soluzione per perturbazioni compatte di funzioni lipschitziane.

Def.3.6 Sia X uno spazio di Banach a duale uniformemente convesso e $j:X \to X^*$ tale che $j(x) \in F(x)$ per ogni $x \in X$ ed essendo $F(x)$ l'applicazione di dualità in X; sia $S \subset X$ limitato e U un intervallo di $\mathbb{R}$; diremo che $f: I \times S \to X$ è α-dissipativa se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di $I \times S$, $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che

$$\langle j(x_1 - x_2),\ f(t_1,x_1) - f(t_2 x_2) \rangle \leq \varepsilon$$

per ogni coppia (t_1,x_1) (t_2,x_2) appartenenti allo stesso elemento ddel ricoprimento.

Teorema 3.7 Sia X uno spazio di Banach a duale uniformemente convesso, $R = [0,a] \times B_b(x_0)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ ed $f: R \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) f continua;

(ii) f α-dissipativa;

(iii) $\|f(t,x)\| \leq M$ per ogni $(t,x) \in R$;

Allora esiste almeno una soluzione del problema di Cauchy (1.1) di punto iniziale $(0,x_0)$ nell'intervallo $[0,T]$, essendo $T < \min\{a, b/4M\}$.

Osservazione 3.8. Il teorema 3.7 si discosta nettamente dai teoremi richiamati precedentemente, perchè nella dimostrazione si sfruttano metodi completamente diversi, come l'indice di non compattezza; inoltre il risultato vale negli spazi di Banach a duale uniformemente convesso, allo scopo di avere la dualità F uniformemente continua negli insiemi limitati, e riguarda solo l'esistenza di almeno una soluzione. Come risultato di sola esistenza, è più forte del teorema 3.4, in quanto la (iii) di tale teorema è banalmente verificata con $\omega = 0$ se f è α-dissipativa.

Il risultato di Cellina è stato generalizzato nel 1975 da Li [25], il quale introduce il concetto di applicazione α-lip-dissipativa nel seguente modo:

Def.3.9 Sia $R = [0,a] \times B_b(x_o)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ e sia $f:R \to X$. Diremo che f è α-lip-dissipativa se esiste $L \geq 0$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento finito $\{U_i\}_{i \in I}$ di R tale che

$$\langle f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2),\ j(x_1-x_2)/\|x_1-x_2\| \rangle \leq L\|x_1 - x_2\| + \varepsilon$$

per ogni coppia di punti $(t_1,x_1),(t_2,x_2)$ appartenenti allo stesso elemento del ricoprimento, con $x_1 \neq x_2$.

Osservazione 3.10 Se abbiamo una funzione α-dissipativa, questa risulta anche α-lip-dissipativa con costante $L=0$.
Sussiste pertanto il seguente risultato, che, per quanto ora osservato, è una generalizzazione del teorema 3.7.

Teorema 3.11 Sia X uno spazio di Banach a duale uniformemente convesso ed $f:R \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) f è continua;

(ii) f è α-lip-dissipativa;

(iii) $\|f(t,x)\| \leq M$ per ogni $(t,x) \in R$;

Allora esiste una soluzione del problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$, nell'intervallo $[0,T]$, essendo $T \leq \min\{a, b/4M\}$.

Osservazione 3.12 Si può provare che le seguenti due condizioni sono equivalenti:

(a) $\langle f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2), y(x_1,x_2)/\|x_1-x_2\| \rangle \leq L\|x_1-x_2\|$ per tutte le coppie (t_1,x_1), (t_2,x_2) di R, con $x_1 \neq x_2$

(b) $D_-[x_1,x_2,f] \leq L\|x_1 - x_2\|$.

Questo ci dice che, localmente, per il caso in cui $\alpha(\|x-y\|) = L\|x-y\|$, il teorema 3.11 è una generalizzazione del teorema di Martin 3.1.

I seguenti risultati sono ancora dovuti a Li e, nel caso in cui f sia uniformemente continua, migliorano i precedenti, perchè non si richiede che lo spazio sia a duale uniformemente convesso.

- Sia ω una funzione di tipo Kamke in $[0,a]$, cioè

- (a) ω: $[0,a] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ misurabile nella prima e continua nella seconda variabile;

(b) $\omega(t,0)=0$

(c) $u(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione continua della disuguaglianza

$$u(t) \le \int_0^t \omega(s,u(s))ds$$

per cui $\lim_{t\to 0^+} u(t)/t$ esiste ed è zero

Teorema 3.13 Sia $R = [0,a] \times B_b(x_o)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times X$ e sia $f: R \to X$ verificante le seguenti condizioni:

(i) f è uniformemente continua in R;

(ii) $\|f(t,x)\| \le M$ per ogni $(t,x) \in R$;

(iii) esiste una funzione Kamke ω tale che, per ogni $S \subset B_b(x_o)$:

$\alpha((I-hf)(t,s)) \ge \alpha(S) - h\omega(t,\alpha(S))$ per ogni $t \in [0,a]$ essendo $h > 0$;

Allora posto $T \le \min\{a, b/M\}$ il problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$ ammette almeno una soluzione in $[0,T]$

Osservazione 3.14 Ogni funzione α-lip-dissipativa, soddisfa la(iii) del teorema precedente, per cuisussiste il seguente corollario:

Corollario 3.15 sia $f: R \to X$ verificante le (i) e (ii) del teorema 3.13. Supponiamo che verifichi inoltre la (iii) f è α-lip-dissipativa. Allora posto $T \le \min\{a,b/M\}$, esiste almeno una soluzione del problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$ definita in $[0,T]$.

Gli ultimi studi sull'esistenza di soluzioni per il problema (1.1) sono orientati a considerare dei secondi membri che siano somma di una parte dissipativa, nel senso di Martin come dalla (ii) del teorema 3.3, e di una parte che abbia proprietà di compattezza. Il seguente recentissimo risultato è dovuto a Schechter [35] e considera proprio un problema di questo tipo:

- Consideriamo il seguente problema:

$$(3.1) \quad \begin{cases} x'=f(t,x) + g(t,x) \\ x(o) = x_o \end{cases}$$

in uno spazio di Banach X.

Teorema 3.16 Sia D un sottoinsieme localmente chiuso di X e sia $x_0 \in D$. Siano f e g funzioni del tipo di Caratheodory; cioè misurabili nella prima variabile e continue nella seconda, da $\mathbb{R} \times D$ in X e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti condizioni:

(i) $(f(t,x)-f(t,y),x-y)_{-} \leq \rho(t)\|x-y\|$ per ogni (t,x,y) di $\mathbb{R} \times D \times D$;

(ii) il condominio di g è relativamente compatto;

(iii) per ogni $(t,x,y) \in \mathbb{R} \times D \times D$

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} d(x+\varepsilon f(t,x) + \varepsilon g(t,x),D)/\varepsilon = 0$$

Allora esiste una soluzione del problema (3.1) in $[0,T]$ dove $T=T(x_0) > 0$. Inoltre $T=+\infty$ se D è chiuso.

Il seguente teorema, pur essendo un caso particolare del teorema precedente, sembra più significativo:

Teorema 3.17 Con le notazioni del teorema precedente, siano $f:\mathbb{R} \times X \to X$ e $g:\mathbb{R} \times X \to X$ delle trasformazioni che, insieme risultano continue. Supponiamo che f e g verifichino rispettivamente la (i) e (ii) del teorema 3.16. Allora il problema (3.1) ammette soluzioni in $[0,\infty)$.

§ 4 PROLUNGABILITA'DELLE SOLUZIONI

Una delle questioni più importanti connesse con lo studio dell'esistenza di soluzioni di una equazione differenziale è il problema della loro prolungabilità. Si intuisce infatti che, per ogni problema sia fisico che matematico, è essenziale sapere fino a quando può esistere la soluzione. Quando la dimensione dello spazio è infinita, non vale il classico teorema di prolungabilità ed è possibile costruire dei controesempi di equazioni differenziali in cui la soluzione esiste in un intervallo del tipo $[t_0,t_0+\delta[$ è ivi limitata, ma non ammette limite per $t \to 0^+$ (cfr.[23]). La causa di questo fenomeno è nel fatto che le funzioni continue, nella dimensione infinita, non trasformano limitati in limitati, perciò dalla limitatezza di x, non segue la limitatezza della derivata e quindi la possibilità di prolungare la soluzione. Sarà possibile prolungarla, invece, tutte le volte che si riescono ad effettuare delle maggiorazioni a priori sulle x' come ad esempio quando si hanno delle ipotesi sulla crescita di f. Tra i primi risultati di prolungabilità di una soluzione c'è quella di Corduneanu [12] del 1957. Le seguenti proposizioni sono tratti da tale lavoro e si riferiscono al caso in cui si consideri il problema (1.1) con f uniformemente continua a condominio precompatto.

Teorema 4.1 Condizione necessaria e sufficiente perchè una soluzione x(t) sia prolungabile in $[t_0,t_1]$ è che il suo grafico sia un α-insieme cioè abbia distanza positiva dalla frontiera dell'insieme in cui è contenuto.

Teorema 4.2 Condizione necessaria e sufficiente perchè la soluzione x(t) per $t\in[t_0,T]$, sia saturata, è che il suo grafico sia un insieme non limitato oppure che contenga punti a distanza arbitrariamente piccola dalla frontiera dell'insieme a cui appartengono.

Teorema 4.3 Sia x(t) una soluzione saturata del problema (1.1) definita in $[t_0,T]$ i punti limite (t,x(t)) per $t\in T$ sono sulla frontiera dell'insieme a cui appartengono, oppure sono all'infinito in $\mathbb{R}$ x X.

Il problema dell'esistenza globale di una soluzione è stato esaminato da Martin nel 1970, infatti il teorema 3.1 è un teorema di esistenza globale della soluzione quando f è dissipativa. Del 1975 è il lavoro di Cellina e Pianigiani [10] nel quale si forniscono delle condizioni sufficienti per la prolungabilità di una soluzione per il problema

$$(4.1)\qquad \begin{cases} x' = f(x) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

essendo f una funzione continua in un aperto Ω di X.

Teorema 4.4 Sia $f:\Omega \to X$ continua e verificante le seguenti condizioni:

(i) per ogni $x_0 \in \Omega$ il problema (4.1) ammette una soluzione locale a destra;

(ii) ad ogni α-insieme $U \subset \Omega$ si possono associare due numeri $\delta = \delta(U)$ e $M=M(U)$, tali che se x e y sono in U e $\|x-y\| \leq \delta$, allora $\inf\{ < f(x)-f(y), j > : j \in F(x-y) \} \leq M$ essendo $F(x)$ la dualità in x.

Allora

(I) per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste una soluzione del problema (4.1) saturata a destra, definita in $[0,\omega)$;

(II) se $\omega < +\infty$ allora esiste una successione $t_n \to \omega$ tale che o $\|x(t_n)\| \to +\infty$ oppure $d(x(t_n), \partial\Omega) \to 0$.

Teorema 4.5 Nelle ipotesi del teorema precedente, se $\delta = \delta(U)$ e $M=M(U)$ esistono non solo per gli α-insiemi, ma per tutti gli insiemi limitati, allora la(II) può essere migliorata:

(II') se $\omega < +\infty$ o esiste una soluzione $t_n \to \omega$ tale che $\|x(t_n)\| \to \infty$,oppure $\lim_{t \to \omega} d(x(t), \partial\Omega) = 0$

Osservazione 4.6 Il teorema 4.5 generalizza i precedenti risultati di Corduneanu e Martin. Infatti se f è uniformemente continua sugli α-insiemi chiusi, allora la condizione (ii) è verificata; analogamente, se f è dissipativa nel senso di Martin come nella proposizione 3.1,la (ii) è ancora verificata. Anche le funzioni completamente continue verificano la (ii).

Teoremi di esistenza globale sono stati dati da altri autori come ad esempio Vidossich [40] e Deimling [19].La versione dei seguenti teoremi è quella data da Deimling nel suo libro del 1977:

Teorema 4.7 Sia X uno spazio di Banach e $J=[0,a)$ con $a \leq \infty$; sia $f:J \times X \to X$ continua e soddisfacente le seguenti ipotesi:

(i) il problema (1.1) di punto iniziale (t_1,x_1) ha una soluzione locale in $t \geq t_1$ per ogni $(t_1,x_1) \in [0,a) \times X$;

(ii) $(f(t,x),x)_- \leq \omega(t,\|x\|)\|x\|$ in $J \times X$, essendo $\omega : J \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

continua e tale che la soluzione massimale ρ^* di $\rho' = \omega(t,\rho)$, $\rho(0) = \|x_o\|$ esista in J e sia nonnegativa;

(iii) f trasforma limitati di J x X in limitati.

Allora il problema (1.1) di punto iniziale $(0,x_o)$, ha una soluzione in J.

Teorema 4.8 Con le notazioni del teorema precedente, se $f:X \to X$ è continua verifica

$$(f(x)-f(y),x-y)_- \leq \omega(\|x-y\|)\ \|x-y\|$$

dove $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è continua tale che $\rho^*(t) \equiv 0$ è la soluzione massimale del problema $\rho' = \omega(\rho)$, $\rho(0) = 0$, allora il problema (1.1) ha un'unica soluzione in J per ogni $x_o \in X$.

Teoremi di esistenza globale sono anche i recenti risultati di Schechter che abbiamo richiamato nei teoremi 3.16 e 3.17.

ESISTENZA DI SOLUZIONI PER UNA INCLUSIONE DIFFERENZIALE IN UNO SPAZIO DI BANACH

§ 5 CASO MULTIVOCO: DIMENSIONE FINITA

Supponiamo che X sia uno spazio di Banach di dimensione finita, diciamo $X \equiv \mathbb{R}^n$, e consideriamo il seguente problema di Cauchy :

$$(5.1) \qquad \begin{cases} x' \in f(t,x) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

essendo F una multifunzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ x X, a valori nell'insieme delle parti non vuote di X.

Per comodità converremo di denotare con:

- K(X) i sottoinsiemi compatti non vuoti di X;
- Cv(X) i sottoinsiemi chiusi convessi non vuoti di X;
- CvB(X) i sottoinsiemi chiusi convessi limitati non vuoti di X;
- CvK(X) i sottoinsiemi convessi compatti non vuoti di X.

I primi risultati di esistenza di soluzioni per il problema (5.1) sono stati stabiliti con la F a valori almeno chiusi e convessi. Per quanto riguarda le altre proprietà richieste alla F per assicurare l'esistenza di una soluzione, bisogna distinguere i due casi in cui F è semicontinua inferiormente o F è semicontinua superiormente. Il primo caso è il più semplice, in quanto la semicontinuità inferiore è strettamente legata all'esistenza di una soluzione continua e questa all'esistenza di una soluzione, grazie al teorema di Peano. Sussiste infatti il seguente teorema:

Teorema 5.1 Sia Ω aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenente (t_0, x_0) ed $F : \Omega \to Cv(\mathbb{R}^n)$ semicontinua inferiormente. Allora esiste almeno una soluzione C^1 del problema (5.1).

Se si suppone che F sia semicontinua superiormente, l'esistenza di una soluzione è meno immediata. Il primo risultato a tale riguardo è di Pliś del 1965 [32] ed è contenuto nel seguente teorema, rielaborazione di Castaing [5]:

Teorema 5.2 Sia $\Omega = [0,a] \times A$, con A aperto di $\mathbb{R}^n$; $F : \Omega \to CvK(\mathbb{R}^n)$ verificante le seguenti condizioni:

(i) $F(t,\cdot)$ è semicontinua superiormente in A per ogni t fissato;

(ii) $F(\cdot,x)$ è misurabile in $[0,a]$ per ogni x fissato;

(iii) esiste una funzione $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ integrabile, tale che $\|u\| \leq g(t)$ per ogni $u \in F(t,x)$ con $(t,x) \in \Omega$.

Allora se $M \subset A$ è tale che

$$\int_0^{t_1} g(s)ds \leq d(M, \partial A) \text{ con } t_1 \text{ opportuno in } [0,a]$$

esiste per ogni $x_0 \in M$ una soluzione del problema (5.1) di punto iniziale $(0,x_0)$ definito in $[0,t_1]$.

Con l'introduzione del concetto di trasformazione localmente compatta, cioè tale che per ogni punto si può trovare un suo intorno la cui immagine sia in un compatto, si può stabilire il seguente teorema, il quale vale anche se X è di Hilbert, a dimensione infinita:

Teorema 5.3 Sia $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ aperto contenente $(0,x_o)$, ed $F : \Omega \to Cv(X)$ verificante le seguenti condizioni:

(i) F è semicontinua superiormente;

(ii) $(t,x) \to m(F(t,x))$ è localmente compatta, essendosi indicata con m la selezione minimale.

Allora esiste $T > 0$ ed esiste una soluzione del problema (5.1) di punto iniziale $(0,x_o)$, definita in $[0,T]$;

Osservazione 5.4 Se $X = \mathbb{R}^n$ ed F a valori convessi compatti non vuoti (i) $\not\Rightarrow$ (ii).

Se consideriamo il caso in cui F sia a valori non necessariamente convessi, allora la questione dell'esistenza di una soluzione diventa più complessa. Filippov è stato il primo a studiare questo problema dapprima in ipotesi di lipschitzianeità [22], poi in ipotesi di sola continuità per la F [21]: la soluzione viene costruita in questo caso, attraverso le poligonali che l'approssimano.

Teorema 5.5 Sia $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto contenente $(0,x_o)$ ed $F : \Omega \to K(\mathbb{R}^n)$ continua. Allora esiste $T > 0$ ed una soluzione del problema (5.1) di punto inziale $(0,x_o)$ definita in $[0,T]$.

L'esistenza di una soluzione del problema (5.1) può essere provata per altra via mediante l'uso del teorema di punto fisso. Il seguente risultato di Antosiewicz e Cellina [2] è del 1974:

Teorema 5.6 Sia $R = [0,a] \times B_b(0)$ rettangolo di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $F : R \to K(\mathbb{R}^n)$ verificante le seguenti condizioni:

(i) $F(\cdot,x)$ è misurabile in $[0,a]$ per ogni fissato $x \in B_b(0)$;

(ii) $F(t,\cdot)$ è continua in $B_b(0)$ per ogni fissato $t \in [0,a]$;

(iii) $\|F(t,x)\| \leq M$ per ogni $(t,x) \in R$;

allora esiste $T > 0$, $T \leq \min\{a, b/M\}$, ed una soluzione di punto iniziale $(0,0)$ del problema (5.1) definita in $[0,T]$.

Questi risultati sono stati migliorati recentemente da Lojasiewicz [26] e da Bressan [4], i quali hanno mostrato che è possibile stabilire l'esistenza di una soluzione, anche nel caso in cui F sia solamente semicontinua inferiormente:

Teorema 5.7 Sia $\Omega\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ aperto contenente (t_o,x_o) e sia $F:\Omega\to K(\mathbb{R}^n)$ semicontinua inferiormente. Se T è tale che $[t_o - T,\ t_o+T]\times\{x_o + T M B_1(0)\}\subset\Omega$ ed ivi $\|F(t,x)\|< M$, allora esiste una soluzione al problema (5.1) in $[t_o-T,t_o+T]$.

Osservazione 5.8 In effetti i risultati dei teoremi 5.6 e 5.7, non sono confrontabili perchè in uno si chiede che F sia una funzione di Caratheodory in (t,x), e nell'altro che sia semicontinua inferiormente e queste proprietà non sono in relazione fra loro. Il teorema 5.7 generalizza certamente il teorema 5.5. Oltre a questi risultati, è importante ricordarne un altro, piuttosto diverso perchè, invece di ridurre le ipotesi sulla F e assicurare l'esistenza di una soluzione, aumenta le richieste per la soluzione. Consideriamo il problema (5.1) autonomo, allora:

Teorema 5.9 Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ aperto, $F:\Omega\to K(\mathbb{R}^n)$, assolutamente continua. Se $x_o\in\Omega$ e $v_o\in F(x_o)$ esiste $T>0$ ed una soluzione C^1 in $[-T,T]$, del problema

$$\begin{cases} x'\in F(x) \\ x(o)=x_o \\ x'(o)=v_o \end{cases}$$

§ 6 CASO MULTIVOCO: DIMENSIONE INFINITA

Ben poco è stato fatto in questo campo, e questo perchè alle difficoltà proprie del multivoco, si aggiungono quelle dovute alla dimensione infinita. Come nel caso univoco anche qui non vale il teorema di esistenza di una soluzione quando F sia solo continua. I controesempi del caso univoco, del resto, ce lo dimostrano e, volendo, partendo da essi, se ne possono costruire altri propriamente multivoci (cfr. [17]). Si può vedere anche nel caso multivoco, che la proprietà di esistenza di una soluzione del problema (5.1) è una proprietà generica nello spazio delle multifunzioni continue e uniformemente limitate. Tale risultato, che è stato provato solo nel caso in cui X è di Hilbert, è dovuto a De Blasi e Myjak [17].

- Sia X uno spazio di Hilbert ed U un aperto di $\mathbb{R} \times X$. Indichiamo con $\mathcal{C}(U,CvK(X))$ (risp: $\mathcal{C}(U,CvB(X))$ lo spazio delle multifunzioni $F:U\to CvK(X)$ (risp: $F:U\to CvB(X)$) continue e uniformemente limitate, munito della metrica

$\rho(F,G) = \sup \{d(F(t,x), G(t,x)):(t,x) \in U\}$

Allora con queste notazioni, sussiste il seguente teorema:

Teorema 6.1 L'insieme di tutte le multifunzioni $F \in \mathcal{C}(U,CvK(X))$ (risp: $\mathcal{C}(U,CvB(X))$),per le quali il problema di Cauchy (5.1) non ammette soluzione, è un insieme magro in $(\mathcal{C}(U,CvK(X)), \rho)$ (risp:$(\mathcal{C}(U,CvB(X)),\rho)$).

Anche nel caso multivoco come nel caso univoco, ci sono dei risultati che si possono generalizzare dalla dimensione finita a quella infinita con piccolissime modifiche.Ad esempio la dimostrazione del teorema di esistenza di una soluzione,di Filippov, quando la F,definita in un rettangolo di $\mathbb{R} \times X$, a valori compatti, è lipschitziana, si può ripetere anche nella dimensione infinita se lo spazio di Banach è separabile. La separabilità di X serve in quel tipo di dimostrazione perchè si sfrutta l'esistenza di una selezione misurabile, cosa che vale solo se X è separabile. E' un problema aperto la questione se tale separabilità sia effettivamente essenziale o meno: molto probabilmente il teorema sussiste anche in uno spazio di Banach qualsiasi. Un altro caso che non è stato esaminato,perchè privo di grande interesse, è il caso in cui F sia semicontinua inferiormente a valori convessi e chiusi. In questo caso, sappiamo che esiste una selezione continua per cui il problema (5.1) si traduce in quello di trovare una soluzione dell'equazione differenziale associata $x'=f(t,x)$, $x(t_o)= x_o$. Tale problema sappiamo che non sempre ammette soluzione, però, se si fanno delle ipotesi ulteriori sulla F che ci diano delle maggiorazioni a priori per la selezione, possiamo ancora trovare una soluzione per il problema (5.1).

Tanto per fare un esempio, si può supporre che le immagini di F siano contenute in un compatto, oppure che F sia α-lipschitziana, cioè $\alpha(F(I\times S)) \leq L\,\alpha(S)$ o che $\alpha(F(I\times S))$ sia maggiorato da funzioni Kamke. Se lo spazio é di Hilbert si potrebbe supporre che -F sia monotona in modo da ottenere una selezione dissipativa oppure qualche altra condizione fra quelle che abbiamo visto nei paragrafi 2 e 3. Al contrario, il caso in cui F sia semicontinua superiormente, è stato studiato da molti matematici. I primi sono stati Castaing e Valadier [6] nel 1968, sullo schema di un precedente lavoro di Castaing [5]. Essi si mettono in ipotesi molto generali perchè considerano spazi vettoriali topologici localmente convessi: gli strumenti che usano sono perciò piuttosto sofisticati e le notazioni pesanti. Quando X è di Banach, il loro principale risultato si può riassumere nel seguente teorema:

Teorema 6.2 Sia X uno spazio di Banach separabile e supponiamo di avere una multifunzione $\Gamma:[0,T] \to CvK(X)$ semicontinua superiormente (oppure inferiormente) per la quale esiste $g \in L^1_+([0,T])$ ed un compatto K di X, tali che $\Gamma(t) \subset g(t)K$ per ogni $t \in [0,T]$. Supponiamo che U sia un aperto di X ed $F:[0,T] \times U \to CvK(X)$ verifichi le seguenti condizioni:

(i) $F(t,x) \subset \Gamma(t)$ per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $x \in U$;

(ii) $F(t,\cdot)$ è semicontinua superiormente per ogni t fissato;

(iii) $F(\cdot,x)$ è semicontinua superioremente (o inferioremente) quasi ovunque in $[0,T]$ per ogni x fissato;

allora per ogni sottoinsieme M di X convesso e compatto incluso in U per cui esista $T_0 \in [0,T]$ tale che $M+\{\int_0^{T_0} f(s)ds \ : \ f \in L^1_X([0,T]),\ f(t) \in \Gamma(t) \text{ q.o.}\} \subset U$, risulta che:

se $x_0 \in M$ il problema (5.1) di punto iniziale $(0,x_0)$ ammette soluzione in $[0,T_0]$

Questo rislutato, in questa formulazione, è stato leggermente migliorato da Daures [13], nel 1970, il quale sostituisce la (ii) con un'altra condizione che egli chiama proprietà Q, spesso conosciuta come sequenziale semicontinuità superiore.

Def. 6.3 Sia X uno spazio topologico ed $F:X \to 2^X - \{\emptyset\}$: diremo che F verifica la proprietà Q (o sequenziale semicontinuità superiore) se per ogni $u \in X$ ed ogni $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di elementi di X, convergente ad u, risulta:

$$\bigcap_{1}^{\infty} \overline{co\left(\bigcup_{n \geq K} F(u_n)\right)} \subset \overline{co(F(u))}$$

Osservazione 6.4 Ogni multifunzione semicontinua superiormente, verifica la proprietà Q.

Teorema 6.5 Con le notazioni del teorema 6.2 nelle ipotesi (i),(iii) e (ii') $F(t,\cdot)$ verifica la tesi del teorema 6.2

Un contributo allo stesso problema è stato dato nel 1973 da Shui-Nee Chow e J.D. Schuur [11]. In realtà essi si occupano principalmente del problema di esistenza di una soluzione per una equazione differenziale contingente, cioè un'inclusione del tipo

$$(6.1) \qquad \begin{cases} Dx \in F(t,x) \\ x(t,o) = x_o \end{cases}$$

essendo $Dx(t) = \{ y \in X \mid x(t+h(n)-x(t))\, h(n)^{-1} \rightharpoonup y$ per qualche $h(n) \to 0^+\}$. Tuttavia, sotto opportune ipotesi, essi mostrano che esiste una soluzione del problema (6.1) che è anche soluzione del problema (5.1).

Teorema 6.6 Sia X uno spazio di Banach riflessivo e separabile e W un aperto connesso di $\mathbb{R} \times X$. Sia $F: W \to Cv(X)$ verificante le seguenti condizioni:

(i) esiste una famiglia numerabile $\mathcal{F} = \{F_n \in X^*\}$ tale che, per ogni $P_o = (t_o, x_o) \in W$, risulti

$$F(P_o) = \bigcap_n Q_n(F(P_o))$$

essendo

$$Q(F(P_o)) = \overline{co} \bigcup \{F(P) / |t_p - t_o| < 1/n, |F_i\ (x_p - x_o)| < 1/n \quad i=1, \dots n\}$$

(ii) F è limitata su ogni insieme A tale che $\inf \{ \|P-Q\| : P \in A, Q \in \partial W\} > 0$;

allora, per ogni $(t_o, x_o) \in W$ esiste un intervallo I ed una soluzione $x(t)$ del problema (6.1) definita in I. Inoltre $x'(t)$ (cioè il limite forte di $((x(t+h) - x(t))h^{-1}$ per $h \to 0)$ esiste e $x'(t) \in F(t,x(t))$ q.o. in I. Pertanto x è soluzione anche del problema (5.1).

Osservazione 6.7 L'ipotesi (i) si esprime dicendo che F è semicontinua nel senso di Cesari ed è una sorta di semicontinuità superiore per la topologia debole. L'ipotesi (ii) si esprime solitamente dicendo che F è limitata su ogni α-insieme. Osserviamo che nel teorema 6.6, mentre da un lato si richiede che F sia solo a valori chiusi e convessi, dall'altro si chiede che X sia riflessivo e separabile, cioè tutto quello che si guadagna sulla F, lo si perde sullo spazio.

Al 1976 risale un lavoro di De Blasi [15], nel quale si stabiliscono dei teoremi di esistenza per inclusioni differenziali autonome in spazi di Banach riflessivi. Il risultato più interessante è l'analogo del risultato di esistenza per funzioni α-lipschitziane nel caso univoco. La misura di non-compattezza introdotta da De Blasi [14] è la seguente $\gamma(A) = \inf\{t > 0 :$ esiste C compatto di X tale che $A \subset C + t\bar{S}\}$ essendo A un insieme limitato, ed $\bar{S}$ la sfera unitaria. Tale risultato è visto come corollario del seguente teorema:

<u>Teorema</u> 6.8 <u>Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $F:B_r(0) \to CvK(X)$ verificante le seguenti condizioni:</u>

(i) <u>F è semicontinua superiormente</u>;

(ii) <u>$\|F(x)\| \leq M$ per ogni $x \in B_r(x_0)$</u>;

(iii) <u>esiste $Q \in CvK(X)$, $T > 0$ tali che $TM < r$ e $x_0 + \overline{\bigcup_{t\in[0,T]} t \text{ co } F(Q)} \subset Q$</u>

<u>Allora esiste una soluzione del problema di Cauchy (5.1) di punto iniziale $(0,x_0)$, nell'intervallo $[0,T]$.</u>

<u>Osservazione</u> 6.9 La condizione (iii) sembra poco naturale; in effetti è una ipotesi di comodo per superare il solito ostacolo della non precompattezza degli insiemi limitati, quando lo spazio ha dimensione infinita. I seguenti due corollari, sono degli esempi di casi in cui la (iii) è automaticamente soddisfatta:

<u>Corollario</u> 6.10 Se X è uno spazio di Banach riflessivo, $F:B_r(x_0) \to CvK(X)$ verifica le (i) (ii) del teorema 6.8 e la seguente:

(iii') F e γ-lipschitziana di costante $K \geq 0$ cioè $\gamma(F(A)) \leq K\gamma(A)$ per ogni A limitato; allora, se $T > 0$ è tale che $KT < 1$ e $TM < r$, esiste una soluzione del problema di Cauchy (5.1) di punto iniziale $(0,x_0)$ nell'intervallo $[0,T]$.

<u>Corollario</u> 6.11 Sia X uno spazio di Banach riflessivo, $F:B_r(x_0) \to CvK(X)$ verifichi le ipotesi (i) ed (ii) del teorema 6.8 e la seguente:

(iii'') F completamente continua: allora esiste una soluzione del problema di Cauchy (5.1) di punto iniziale $(0,x_0)$ nell'intervallo $[0,T]$

essendo $T > 0$ tale che $T M < r$.

Il teorema seguente è tratto da un recente lavoro di De Blasi e Pianigiani [18] e stabilisce un risultato di esistenza di una soluzione per il problema (5.1) quando F è a valori nei chiusi convessi limitati non vuoti di X, ad interiore non vuoto, brevemente $CvB_o(X)$, ed è continua. Abbiamo già osservato che la continuità, da sola non è sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione per la (5.1), perciò, in questo caso, risulterà essenziale il fatto che $F(t,x)$ abbia interiore non vuoto.

<u>Teorema</u> 6.12 <u>Sia F una multifunzione definita in un aperto di $\mathbb{R} \times X$, a valori in $CvB_o(X)$. Sia (t_o,x_o) nel dominio di F e sia $\Omega = J \times B_{2r}(x_o)$ essendo $J=(t_o-2a, t_o+2a)$. Supponiamo che F verifichi le seguenti proprietà:</u>

(i) <u>F è continua in Ω;</u>

(ii) <u>$\|F(t,x)\| \leq M$ per ogni $(t,x) \in \Omega$;</u>

<u>allora il problema (5.1) possiede almeno una soluzione definita in $[t_o,T]$, essen- $0 \leq T - t_o \leq \min\{a, r/M\}$.</u>

A partire da questo risultato se ne ricava un altro molto interessante:

- Consideriamo uno spazio di Banach riflessivo X e sia F definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times X$ a valori in $CvB_o(X)$.

  Supponiamo che sia $G(t,x) = \partial F(t,x)$ per ogni (t,x) nell'insieme di definizione della F. Consideriamo il problema

$$(6.2) \qquad \begin{cases} x' \in G(t,x) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

ed il suo convessificato (5.1); sussiste il seguente teorema:

<u>Teorema</u> 6.13 <u>Con le notazioni precedenti, supposto che F verifichi la (i) e (ii) del teorema 6.12, allora il problema di Cauchy (6.2), ammette soluzione in $[t_o,T]$; inoltre, l'insieme delle soluzioni della (6.2) è un G_δ -denso nell'insieme delle soluzioni dalla (5.1)</u>

Recenti contibuti allo studio del problema (5.1) si sono avuti da Tolstonogov [38]; tuttavia i suoi risultati sono stabiliti in spazi molto generali, con mezzi sofisticati dell'Analisi Funzionale, il che esula dal nostro interesse. Purtroppo altri risultati in questo campo non ce ne sono ed il quadro che ne abbiamo fatto non può che risultare incompleto e lacunoso. Lo scarso sviluppo di tali studi è dovuto in parte al poco interesse che può avere l'estenzione di certi risultati alla dimensione infinita ed in parte al fatto che, non essendo ancora completa la teoria nel caso della dimensione finita, i matematici che studiano questi problemi preferiscono vedere per bene come vanno le cose in $\mathbb{R}^n$ piuttosto che estendere i teoremi noti in $\mathbb{R}^n$ agli spazi di Banach.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.AMBROSETTI, Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach, Rend.Sem.Mat. Univ.Padova, 39 (1967), 349-361

[2] H.A.ANTOSIEWICZ-A.CELLINA, Continuous selections and differential relations, J.Differential Equations, 19 (1975), 386-398

[3] J.P.AUBIN-A.CELLINA, Differential Inclusions, to appear

[4] A.BRESSAN, On differential relations with lower semicontinuous right-hand side, J.Differential Equations, 37 (1980) n.1, 89-97

[5] C.CASTAING, Sur les équations différentielles multivoques, C.R.Acad .Sc. Paris, 263 (1966) Sér. A. 63-66.

[6] C.CASTAING-M.VALDIER, Équations différentielles multivoques dans les espaces localment convexes, C.R.Acad.Sc.Paris 266 (1968) Sér A. 985-987

[7] A.CELLINA, On the existence of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 14 (1971), 129-136

[8] A.CELLINA, On the local existence of solutions of ordinary differential equations, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys.20(1972) n.4 293-296.

[9] A.CELLINA, On the Cauchy problem for ordinary differential equations in Banach spaces, Difford 74

[10] A.CELLINA-C.PIANIGIANI, On the prolungability of solutions of autonomous differential equations, Boll.Un.Mat.Ital.9(1974), 824-830

[11] S.N.CHOW-J.D.SCHUUR, Fundamental theory of contingent differential equations in Banach space, Trans. Amer. Math.Soc. 179 (1973), 133-144.

[12] C.CORDUNEANU, Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilità, Atti Accad.Naz.Lincei Rend.Cl.Sci.Fis.Mat.Natur. 23 (1957), 226-230.

[13] J.P.DAURES, Contribution à l'étude des équations différentielles multivoques dans les espaces de Banach,C.R.Acad.Sc.Paris, 270 (1970) Sér.A, 769-722.

[14] F.S.DE BLASI, On the differentiability of multifunctions,Pacific Journal Math. 66 (1976) N.1,67-81

[15] F.S.DE BLASI, Existence and stability of solution for autonomous multivalued differential equations in Banach space. Atti Accad.Naz.Lincei Rend.Cl.Sci.Fis. Mat.Natur., 60 (1976) n.6, 767-774.

[16] F.S.DE BLASI-J.MYJAK, Generic properties of differential equations in a Banach space, Bull.Acad.Polon. Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys. 26 (1978) n.5, 395-400.

[17] F.S.DE BLASI-J.MYJAK, The generic property of existence of solutions of multivalued differential equations in Hilbert space, Funkcialaj Ekvacioj 21 (1978). n.3, 271-278.

[18] F.S.DE BLASI-G.PIANIGIANI, A category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces, to appear .

[19] K.DEIMLING, Ordinary Differential Equations in Banach space, Lecture Notes in Mathematics, Vol.596 Springer-Verlag, Belin, New York, 1977.

[20] A.F.FILIPPOV, Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side, SIAM J.Control, 5 (1967) n.4, 609-621.

[21] A.F.FILIPPOV, The existence of solutions of generalized differential equations, Matem.Zametki, 10 (1971) n.3, 307-313.

[22] K.GOEBEL-W.RZYMOWSKI, An existence theorem for the equation x'=f(t,x) in Banach spaces, Bull.Acad.Polon.Sci. Sér.Sci.Math.Astronom.Phys. 18 (1970) 367-370.

[23] G.E.LADAS-Y.LAKSHMIKANTAM, Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York, London, 1972.

[24] A.LASOTA-J.A.YORKE, The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces. J.Differential Equations, 13 (1973), 1-12.

[25] T.Y.LI, Existence of solutions for ordinary differential equations in Banach spaces, J.Differential Equations, 18 (1975), 29-40.

[26] S.LOJASIEWICZ JR., The existence of solutions for lower semicontinuous orienter fields, Bull.Acad.Polon. Sci. Sér. Sci.Math.astronom.Phys. 28 (1980) 483-487.

[27] D.L.LOVELADY-R.H.MARTIN JR., A global existence theorem for a nonautonomous differential equation in a Banach space, Proc.Amer.Math.Soc.; 35 (1972) n.2, 455-449.

[28] R.H.MARTIN JR., A global existence theorem for autonomous differential equations in a Banach space, Proc.Amer.Math.Soc., 26 (1970), 307-314.

[29] R.H.MARTIN JR., Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Pure and Applied Mathematics Wiley Interscience, New York, London, Sydney, 1976.

[30] H.MÖNCH-G.F.VON HARTEN, On the Cauchy problem for ordinary differential equations in Banach space, To appear in Archiv der Mathematik.

[31] G.PIANIGIANI, Existence of solutions for ordinary differential equations in Banach spaces, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys., 23 (1975) n.8, 853-857.

[32] A.PLIŚ, Measurable orienter fields, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astronom. Phys.,13 (1965), 565-569.

[33] B.RICCERI, Sull'esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie negli spazi di Banach in ipotesi di Caratheodory, Boll.Un.Mat.Ital., 18 (1981), n.1, 1-19.

[34] W.RZYMOWSKI, On the existence of solutions of the equations x'=f(t,x) in a Banach space, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys.,19 (1971) n.4, 295-299.

[35] E.SCHECHTER, Evolution generated by continuous dissipative plus compact operators, Bull.London Math.Soc.,13 (1981) 303-308.

[36] S.SZUFLA, Some remarks on ordinary differential equations in Banach spaces,Bull. Acad.Polon. Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys., 16 (1968), 795-800.

[37] S.SZUFLA, On the existence of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, Boll.Un.Mat.Ital., 15 (1978) n.3, 535-544.

[38] A.A. TOLSTONOGOV, Comparison theorems for differential inclusions in a locally convex space. Existence of solutions. Differentsial'nye Uravneniya 17 (1981) n.4, 651-659.

[39] G.VIDOSSICH, Existence, uniqueness and approximation of fixed points as a generic property . Bol.Soc.Brasil Mat., 5 (1974) 17-29.

[40] G.VIDOSSICH, Existence, comparison and asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations in finite and infinite dimensional Banach spaces.