SISSA - SCUOLA
INTERNAZIONALE
SUPERIORE
I STUDI AVANZATI
TRIESTE
Strada Costiera 11

ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

TESI

DI

MAGISTER PHILOSOPHIAE

LIMITI DI PROBLEMI DI MINIMO PER FUNZIONALI QUADRATICI DI ORDINE SUPERIORE CON OSTACOLI

CANDIDATA :

GABRIELLA PADERNI

SUPERVISORE :

Prof. G. DAL MASO

ANNO ACCADEMICO

1984/85

TRIESTE

TESI

DI

MAGISTER PHILOSOPHIAE

LIMITI DI PROBLEMI DI MINIMO
PER FUNZIONALI QUADRATICI
DI ORDINE SUPERIORE
CON OSTACOLI

CANDIDATA :

GABRIELLA PADERNI

SUPERVISORE :

Prof. G. DAL MASO

ANNO ACCADEMICO

1984/85

INDICE

INTRODUZIONE

In questo lavoro di tesi sono discussi alcuni aspetti della convergenza dei minimi (e dei punti di minimo) di successioni di funzionali con ostacoli variabili del tipo

$$(P_h) \qquad \min_{\varphi_h \le u \le \psi_h} \left[F(u,\Omega) + \int_\Omega g u \right]$$

dove

$$(0.1) \qquad F(u,\Omega) = \int_\Omega f(x, u(x), \dots, D^m u(x))\, dx \, .$$

Il problema che ci si pone è la ricerca delle condizioni che garantiscono l'esistenza di un funzionale G, tale che la soluzione di (P_h) converga alla soluzione del problema

$$(P) \qquad \min \left[F(u,\Omega) + G(u,\Omega) + \int_\Omega g u \right] .$$

Garantita l'esistenza di tale G se ne cerca, quindi, una forma esplicita.

Esistono in letteratura ([30], [6], [25], [7], [26], [1], [10], [3], [9], [4], [8]) molti esempi in cui, sotto opportune condizioni di convergenza delle successioni di ostacoli φ_h e ψ_h rispettivamente a funzioni φ e ψ, il funzionale G esiste e ha la forma

$$G(u,\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi \le u \le \psi \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ossia casi in cui il problema limite è del tipo

$$(P') \qquad \min_{\varphi \le u \le \psi} \left[F(u,\Omega) + \int g u \right]$$

D'altra parte, in un lavoro di Carbone e Colombini ([9]) è mostrato un esempio in cui, per $F(u,\Omega) = \int_\Omega |Du|^2$ e (P_h) una successione di ostacoli unilaterali ($\psi_h = +\infty$ ovunque in Ω), il funzionale G non è più di tipo ostacolo ma ha la forma $G(u,\Omega) = c\int_\Omega (u \vee 0)^2$.

Utilizzando le relazioni tra la Γ-convergenza di successioni di funzionali e la convergenza delle soluzioni dei corrispondenti problemi di minimo ([20]), si dimostra che ([19],[17],[15],[16],[5],[2],[32]) per $F(u,\Omega) = \int_\Omega |Du|^2$ e per ogni successione di ostacoli unilaterali, esistono una misura di Borel μ e una funzione misurabile h tali che risulti:

$$(0.2) \qquad G(u,\Omega) = \int_\Omega h(x, u(x))\, d\mu$$

Questo risultato si generalizza poi al caso di ostacoli bilaterali ([14],[5],[2]) e, per ostacoli unilaterali, a funzionali della forma $F(u,\Omega) = \int_\Omega f(x,Du)$ ([5],[2]).

Nella problematica qui affrontata si inseriscono tutti i risultati - ottenuti da molti autori con metodi diversi ([22],[27],[24],[33],[23],[13],[11],[31],[12],[32],[2]) - riguardanti problemi di Dirichlet in domini variabili; per esempio in domini Ω di $\mathbb{R}^n$ contenenti dei "buchi" periodicamente o casualmente distribuiti, il cui numero tende all'infinito quando la loro dimensione lineare tende a zero. Infatti, se con E_h denotiamo l'unione dei"buchi", il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \setminus E_h \\ u = 0 & \text{su } \partial E_h \cup \partial\Omega \end{cases}$$

può essere posto nella forma variazionale

$$\min_{\varphi_h \leq u \leq \psi_h} \left[\int_\Omega |Du|^2 + \int g u \right]$$

con

$$\varphi_h = -\psi_h = \begin{cases} 0 & \text{su } E_h \\ -\infty & \text{su } \Omega \setminus E_h \end{cases}$$

In questo lavoro di tesi consideriamo successioni di problemi di minimo per funzionali di ordine superiore al primo. Soluzioni esplicite del problema limite ottenute nel caso dei "buchi" con metodi diretti si trovano in [27].

In un recente lavoro, C. Picard ([32]) definisce una classe $\mathcal{F}$ di funzionali contenente gli ostacoli unilaterali e bilaterali e dimostra un teorema di compattezza, rispetto alla Γ-convergenza, per funzionali del tipo F+G, con $F(u,\Omega) = \int_\Omega |\Delta u|^2$ e $G \in \mathcal{F}$. Ma solo per una sottoclasse più piccola $\mathcal{F}'$ di $\mathcal{F}$, contenente soltanto gli ostacoli unilaterali, dimostra che il funzionale Γ-limite di una successione $F+G_h$, con G_h in $\mathcal{F}'$, ha la forma F+G con G dato da (0.2). Il risultato è ottenuto utilizzando un teorema di rappresentazione integrale di G. Dal Maso ([16]).

Per ottenere un teorema di rappresentazione integrale, valido anche per ostacoli bilaterali, nella tesi consideriamo una classe $\mathcal{G}$ di funzionali (vedi def. 3.1) caratterizzata da proprietà leggermente più restrittive rispetto a quelle di $\mathcal{F}$.

Per tale classe dimostriamo un teorema di compattezza, rispetto alla $\Gamma(H^1(\Omega)^-)$

convergenza (vedi definizioni di § 1.2) e deduciamo, infine, la convergenza dei minimi per funzionali del tipo:

$$(0.3) \qquad \int_\Omega |\Delta u|^2 + G_h(u,\Omega) + \int_\Omega gu$$

dove G_h è una successione in $\mathcal{G}$.

Anticipiamo che le proprietà che definiscono la classe $\mathcal{G}$ permettono di dimostrare un teorema di rappresentazione integrale.

Su questo argomento ci proponiamo di ritornare in un lavoro successivo.

Il lavoro di tesi è così suddiviso:

- Nel primo capitolo richiamiamo alcune definizioni e proprietà che concernono la capacità e i Γ-limiti;
- nel secondo capitolo studiamo le proprietà dei funzionali G(u,B) che sono crescenti in B e semicontinui inferiormente in u su un arbitrario spazio funzionale
- nel terzo capitolo definiamo una classe $\mathcal{G}$ di funzionali da $H^2_{loc}(\Omega) \times \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ che contiene i funzionali ostacolo unilaterale e bilaterale e dimostriamo un teorema di compattezza per questa classe rispetto alla Γ-convergenza;
- nel quarto capitolo studiamo l'effetto delle condizioni al contorno sulle successioni di funzionali del tipo (0.3);
- nel quinto capitolo deduciamo la convergenza dei minimi di una successione di funzionali dalla Γ-convergenza dei funzionali stessi.

1 PRELIMINARI

§ 1.1 Capacità e funzioni quasi continue.

In questo paragrafo richiamiamo le definizioni di capacità e di funzioni quasi continue.

Denotiamo con L^p lo spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$ con la norma

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right]^{1/p}$$

e con $W^{m,p}$ lo spazio delle funzioni $u \in L^p$ tali che $D^\alpha u \in L^p$ per ogni multi-indice α con $|\alpha| \leq m$ e con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p} \right]^{1/p}.$$

H^2 denoterà lo spazio $W^{2,2}$.

Definizione 1.1 Per ogni insieme compatto K di $\mathbb{R}^n$ la (m,p)-capacità é definita da:

$$C_{m,p}(K) = \inf \left\{ \|\varphi\|^p_{W^{m,p}} : \varphi \in C_0^\infty ,\ \varphi \geq 1 \text{ su } K ,\ \varphi \geq 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \right\}$$

La definizione si estende ad insiemi aperti A e ad insiemi arbitrari E nel seguente modo:

$$C_{m,p}(A) = \sup \left\{ C_{m,p}(K) : K \subseteq A ,\ K \text{ compatto} \right\}$$

$$C_{m,p}(E) = \inf \left\{ C_{m,p}(A) : A \supseteq E ,\ A \text{ aperto} \right\}$$

Se una proprietà P sussiste per tutti gli $x \in E$ eccetto che per un insieme di (m,p)-capacità nulla, diciamo che P sussiste (m,p)-quasi ovunque su E.

<u>Definizione</u> 1.2 Diciamo che una funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è (m,p)-quasi continua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $C_{m,p}(A) < \varepsilon$, tale che $f_{|A^c}$ è continua su $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$.

<u>Proposizione</u> 1.3 (vedi [29]) Ogni $u \in W^{m,p}$ ha un rappresentante (ossia una funzione in $W^{m,p}$ che differisce da u solo su un insieme dimisura di Lebesgue nulla) (m,p)-quasi continuo, che è unico.

Se $u \in W^{m,p}$ denotiamo con $\tilde{u}$ il rappresentante (m,p)-quasi continuo di u.

<u>Proposizione</u> 1.4 (vedi [28] teorema 4) Se u_h è una successione in $W^{m,p}$ che converge ad u in $W^{m,p}$, allora esiste una sottosuccessione $\tilde{u}_{h_k}$ di rappresentanti quasi continui di u_h che converge ad $\tilde{u}$ (m,p)-quasi ovunque.

§ 1.2 <u>Γ-convergenza</u>

Richiamiamo le definizioni di Γ-limiti di successioni di funzioni definite su spazi metrici e le proprietà che verranno utilizzate nei capitoli successivi.

Siano (X,d) uno spazio metrico, F_h una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$

e u un elemento di X. Allora

$$F^-(u) = \Gamma(d^-)\liminf_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(v)$$

se e solo se

a) per ogni successione u_h convergente ad u in (X,d):

$$F^-(u) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(u_h)$$

b) esiste una successione u_h convergente ad u in (X,d) tale che:

$$F^-(u) = \liminf_{h\to\infty} F_h(u_h)$$

e

$$F^+(u) = \Gamma(d^-)\limsup_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(v)$$

se e solo se

a') per ogni successione u_h convergente ad u in (X,d):

$$F^+(u) \leq \limsup_{h\to\infty} F_h(u_h)$$

b') esiste una successione u_h convergente ad u in (X,d) tale che:

$$F^+(u) = \limsup_{h\to\infty} F_h(u_h)$$

Diciamo che F_h Γ-converge ad una funzione $F:X\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ in u e scriviamo:

$$F(u) = \Gamma(d^-)\lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(v)$$

se $F(u)=F^-(u)=F^+(u)$.

Osservazione 1.5 (vedi [20] osservazione 1.2) Se d' è una metrica che induce su X una topologia più fine di quella indotta da d su X, allora valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\Gamma(d'^-) \liminf_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v) \leq \Gamma(d^-) \liminf_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v)$$

$$\Gamma(d'^-) \limsup_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v) \leq \Gamma(d^-) \liminf_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v)$$

per ogni $u \in X$.

Osservazione 1.6 (vedi [20] proposizione 1.8) Data $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, le funzioni

$$u \longmapsto \Gamma(d^-) \liminf_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v)$$

$$u \longmapsto \Gamma(d^-) \limsup_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v)$$

sono semicontinue inferiormente su X.

Osservazione 1.7 (vedi [20] proposizione 1.19 ed osservazione 1.12) Se $F_h, F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sono tali che F_h Γ-converge ad F in $u \in X$ e $G: X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione continua in u, allora vale anche:

$$F(u) + G(u) = \Gamma(d^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} [F_h(v) + G(v)]$$

Teorema 1.8 (vedi [20] corollario 2.4) Sia F_h una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che esista un sottoinsieme compatto K di X tale che:

$$\inf_{v \in K} F_h(v) = \inf_{v \in K} F_h(v)$$

Supponiamo, inoltre, che, per ogni $u \in X$, esiste

$$\Gamma(d^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(v) = F(u)$$

Allora si ha:

$$\min_{v \in K} F(v) = \min_{v \in X} F(v) = \lim_{h \to \infty} \inf_{v \in X} F_h(v)$$

Inoltre se u_h è una successione di elementi di X convergente ad $u \in X$ e

$$\lim_{h \to \infty} F_h(u_h) = \lim_{h \to \infty} \inf_{v \in X} F_h(v)$$

allora

$$F(u) = \min_{v \in X} F(v)$$

Teorema 1.9 (vedi [20] proposizione 3.1) Sia F_h una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$, allora esiste una sottosuccessione F_{h_k} tale che il

$$\Gamma(d^-) \lim_{\substack{k \to \infty \\ v \to u}} F_{h_k}(v)$$

esiste per ogni $u \in X$.

2 FUNZIONALI CRESCENTI E SEMICONTINUI INFERIORMENTE

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Denoteremo con $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{A}$ rispettivamente i boreliani e gli aperti contenuti in Ω. Sia (X,d) uno spazio metrico separabile e sia $\mathcal{E}$ uno qualunque dei due insiemi $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{A}$.

In questo capitolo vogliamo studiare le proprietà dei funzionali $F : X \times \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ che sono semicontinui inferiormente rispetto alla prima variabile e crescenti rispetto alla seconda.

Daremo inizialmente alcune definizioni e proprità delle funzioni crescenti di insieme.

Definizione 2.1 Diremo che una funzione $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ é crescente se $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$ per ogni $A,B \in \mathcal{E}$ con $A \subseteq B$; internamente regolare se per ogni $A \in \mathcal{E}$: $\alpha(A) = \sup\{\alpha(B),\ B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A}\}$; esternamente regolare se $\alpha(A) = \inf\{\alpha(B),\ B \in \mathcal{E},\ \mathring{B} \supseteq \overline{A}\}$ per ogni $A \in \mathcal{E}$.

Definizione 2.2 Sia $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Le funzioni $\alpha_-, \alpha_+ : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da:

$$\alpha_-(A) = \sup\{\alpha(B);\ B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A}\}$$
$$\alpha_+(A) = \inf\{\alpha(B);\ B \in \mathcal{E},\ \mathring{B} \supseteq \overline{A}\}$$

saranno denominate rispettivamente regolarizzata interna e regolarizzata esterna di α.

E' di immediata verifica che $\alpha_- \leq \alpha \leq \alpha_+$ e

$(\alpha_-)_- = \alpha_-$; $(\alpha_-)_+ = \alpha_+$; $(\alpha_+)_- = \alpha_-$; $(\alpha_+)_+ = \alpha_+$.

<u>Definizione</u> 2.3 Un sottoinsieme $\mathcal{D}$ di $\mathcal{E}$ é denso in $\mathcal{E}$ se per ogni $A,B \in \mathcal{E}$, $\overline{A} \subseteq \mathring{B}$, esiste $D \in \mathcal{D}$, tale che $\overline{A} \subseteq \mathring{D} \subseteq \overline{D} \subseteq \mathring{B}$.

<u>Definizione</u> 2.4 Una famiglia $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ di elementi di $\mathcal{E}$ si dice una catena per $\mathcal{E}$ se per ogni $s,t \in \mathbb{R}$, $s < t$, risulta $\overline{A}_s \subseteq \mathring{A}_t$.

<u>Definizione</u> 2.5 Un sottoinsieme $\mathcal{R}$ di $\mathcal{E}$ é detto essere ricco in $\mathcal{E}$ se per ogni catena $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ in $\mathcal{E}$ l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : A_t \notin \mathcal{R}\}$ é al più numerabile.

E' utile per quanto segue notare che un'intersezione numerabile di insiemi ricchi di $\mathcal{E}$ é ancora un insieme ricco in $\mathcal{E}$, ogni sottoinsieme ricco di $\mathcal{E}$ é anche denso in $\mathcal{E}$ e un sottoinsieme di $\mathcal{E}$ contenente un insieme ricco in $\mathcal{E}$ é ricco in $\mathcal{E}$.

<u>Proposizione</u> 2.6 Sia $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora l'insieme $\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{E} : \alpha_-(A) = \alpha_+(A)\}$ é ricco in $\mathcal{E}$.

<u>Dimostrazione</u> E' noto che se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é una funzione crescente, $f_-(t) = \sup_{s<t} f(s)$ e $f_+(t) = \inf_{s>t} f(s)$, allora l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : f_-(t) < f_+(t)\}$ é al più numerabile.

Sia $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una catena in $\mathcal{E}$ e sia, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \alpha(A_t)$. Allora, poiché $\varphi_-(t) \leq \alpha_-(A_t) \leq \alpha_+(A_t) \leq \varphi_+(t)$, si ha

$$\{t \in \mathbb{R} : A_t \notin \mathcal{R}\} \subseteq \{t \in \mathbb{R} : \varphi_-(t) < \varphi_+(t)\}$$

e quest'ultimo insieme é al più numerabile in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.7 (vedi [18] proposizione 2.12) Sia $\alpha : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una funzione crescente con le seguenti proprietà:

(a) $\alpha(A_1 \cup A_2) \leq \alpha(A_1') + \alpha(A_2)$ per ogni $A_1, A_1', A_2 \in \mathcal{A}$ con $A_1 \subseteq A_1'$

(debole subadditività)

(b) $\alpha(A_1 \cup A_2) \geq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$ per ogni $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

(superadditività)

(c) $\alpha(A) = \sup\{\alpha(A') : A' \in \mathcal{A},\ \overline{A'} \subseteq A\}$ per ogni $A \in \mathcal{A}$

(regolarità interna)

allora α é una misura su $\mathcal{B}$.

Definizione 2.8 Sia f una funzione definita in (X,d) ed a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Diremo che f é semicontinua inferiormente su X se, per ogni $x \in X$ e per ogni $x_h \to x$ in (X,d), $f(x) \leq \liminf_{h \to \infty} f(x_h)$.

Consideriamo ora la classe $\mathcal{F}$ dei funzionali crescenti e semicontinui inferiormente definiti su $X \times \mathcal{E}$ e a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, ossia dei funzionali F tali che

(a) per ogni $u \in X$ la funzione $B \to F(u,B)$ é crescente su $\mathcal{E}$

(b) per ogni $B \in \mathcal{E}$ la funzione $u \to F(u,B)$ é semicontinua inferiormente su X.

Definizione 2.9 Un funzionale crescente $F : X \times \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice internamente regolare se, per ogni $u \in X$, F coincide con il suo regolarizzato interno, ossia, per ogni $A \in \mathcal{E}$: $F(u,A) = F_-(u,A) \equiv \sup\{F(u,B),\ B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A}\}$; e si dice esternamente regolare se coincide con il suo regolarizzato esterno, ossia se, per ogni $A \in \mathcal{E}$ e $u \in X$, $F(u,A) = F_+(u,A) \equiv \inf\{F(u,B),\ B \in \mathcal{E},\ \overset{\circ}{B} \supseteq \overline{A}\}$.

Se $F \in \mathcal{F}$, allora il suo regolarizzato interno F_- é crescente, semicontinuo inferiormente e internamente regolare, mentre il regolarizzato esterno F_+ non conserverà la proprietà di semicontinuità di F.

<u>Definizione</u> 2.10 Sia $F : X \times \mathcal{E}$ un funzionale crescente. L'inviluppo semicontinuo inferiormente sc^-F di F é il funzionale $sc^-F : X \times \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definito da :

$$(sc^-F)(u,A) = [sc^-(F(\cdot,A))]\ (u) = \liminf_{v \to u} F(v,A)$$

per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{E}$. L'inviluppo semicontinuo inferiormente del regolarizzato esterno F_+ di F é il funzionale definito da $F_{\#} = sc^-(F_+)$. Dato comunque F, risulterà dunque $F_{\#} \in \mathcal{F}$.

E' di immediata verifica che se $F \in \mathcal{F}$ allora

(2.1) $\quad F_- \leqslant F \leqslant F_{\#}$

(2.2) $\quad (F_-)_- = F_- \ ; \quad (F_-)_{\#} = F_{\#} \ ; \quad (F_{\#})_- = F_- \ ; \quad (F_{\#})_{\#} = F_{\#}$

Vogliamo ora dimostrare che se $F \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{R}_F$ è il sottoinsieme di $\mathcal{E}$ così definito:

(2.3) $$\mathcal{R}_F = \{A \in \mathcal{E} : F(u,A) = F_{\#}(u,A) \quad \forall u \in X\}$$

allora $\mathcal{R}_F$ è un sottoinsieme ricco di $\mathcal{E}$.

<u>Definizione</u> 2.11 Sia $F \in \mathcal{F}$ tale che $F: X \times \mathcal{E} \mapsto [0,1]$ (se F ha valori su tutto $\overline{\mathbb{R}}$ la si può sempre comporre con un omeomorfismo). Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sia $T_\lambda F: X \times \mathcal{E} \to [0,1]$ il funzionale crescente definito da:

$$(T_\lambda F)(u,A) = \inf_{v \in X} [F(v,A) + \lambda d(v,u)]$$

E' possibile dimostrare (vedi per esempio [17] lemmi 2.8 e 2.9) che per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{E}$

$$F(u,A) = \sup_{\lambda > 0} (T_\lambda F)(u,A) = \lim_{\lambda \to \infty} (T_\lambda F)(u,A) \tag{2.4}$$

e per ogni $\lambda > 0$, $A \in \mathcal{E}$, $u,v \in X$, $\exists\, L > 0$ tale che:

$$|(T_\lambda F)(u,A) - (T_\lambda F)(v,A)| \leq L\, d(u,v) \tag{2.5}$$

Le (1.4) e (1.5) ci permettono di provare la seguente proposizione.

<u>Proposizione</u> 2.12 Sia $F \in \mathcal{F}$. Esiste un insieme ricco $\mathcal{R}$ tale che $F_-(u,A) = F(u,A)$ per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{R}$.

<u>Dimostrazione</u> Sia per ogni $\lambda > 0$, $T_\lambda F$ il funzionale della definizione 2.11 e sia u_k una successione densa in X. Per la proposizione 2.6 per ogni $h,k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $\mathcal{R}_{hk}$ ricco in $\mathcal{E}$ tale che per ogni $A \in \mathcal{R}_{hk}$:

$$(T_h F)(u_k, A) = \sup \{ (T_h F)(u_k, B) ; B \in \mathcal{E}, \overline{B} \subseteq \mathring{A} \} \tag{2.6}$$

Sia $\mathcal{R} = \bigcap_{h,K} \mathcal{R}_{hK}$. $\mathcal{R}$ è ricco in $\mathcal{E}$ e per la (2.5) e la densità di u_k in X risulta che per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{R}$:

$$(T_h F)(u,A) = \sup \{ (T_h F)(u,B);\ B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A} \}$$

Dalla (2.4) segue, dunque , che:

$$F(u,A) = \sup_{h \in \mathbb{N}} (T_h F)(u,A) = \sup_{h \in \mathbb{N}} \sup \{ (T_h F)(u,B);\ B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A} \} =$$

$$= \sup \{ \sup_{h \in \mathbb{N}} (T_h F)(u,B) : B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A} \} =$$

$$= \sup \{ F(u,B);\ B \in \mathcal{E},\ \overline{B} \subseteq \mathring{A} \} = F_-(u,A)$$

per ogni $u \in X$ e per ogni $A \in \mathcal{R}$. ∎

Siamo ora in grado di dimostrare:

<u>Proposizione</u> 2.13 Sia $F \in \mathcal{F}$ e sia $\mathcal{R}_F = \{ A \in \mathcal{E} : F(u,A) = F_\pm(u,A)\ \forall u \in X \}$ Allora $\mathcal{R}_F$ è un insieme ricco in $\mathcal{E}$.

<u>Dimostrazione</u> Poichè $F \in \mathcal{F}$ possiamo applicare la proposizione 2.12. Tenendo conto della (2.1) e della (2.2) avremo, dunque, che l'insieme su cui $F = F_{\#}$ è ricco in $\mathcal{E}$. ∎

La seguente proposizione sarà utile nelle dimostrazioni dei teoremi dei

dei capitoli 3 e 4.

Proposizione 2.14 Siano F e G due funzionali in $\mathcal{F}$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

(a) per ogni $u \in X$ esiste un insieme $\mathcal{D}(u)$ denso in $\mathcal{E}$ tale che $F(u,D)=G(u,D)$ per ogni $D \in \mathcal{D}(u)$;

(b) per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{E}$ $F_-(u,A)=G_-(u,A)$;

(c) esiste un insieme ricco $\mathcal{R}$ in $\mathcal{E}$ tale che $F(u,A)=G(u,A)$ per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{R}$;

(d) se $\mathcal{R}_F$ e $\mathcal{R}_G$ sono gli insiemi definiti da (1.3) si ha $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}_G$ e $F(u,A)=G(u,A)$ per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{R}_F$.

Dimostrazione (a) $\Rightarrow$ (b) Sia per ogni $u \in X$ fissato $\mathcal{D}(u)$ l'insieme denso su cui F=G; allora per ogni $A \in \mathcal{E}$ si ha

$$\sup\{F(u,B);\, B\in\mathcal{E},\, \overline{B}\subseteq \mathring{A}\} = \sup\{F(u,D);\, D\in\mathcal{D}(u),\, \overline{D}\subseteq\mathring{A}\} =$$

$$= \sup\{G(u,D);\, D\in\mathcal{D}(u),\, \overline{D}\subseteq\mathring{A}\} = \sup\{G(u,B);\, B\in\mathcal{E},\, \overline{B}\subseteq\mathring{A}\}$$

Segue, quindi, che per ogni $A \in \mathcal{E}$ e $u \in X$, $F_-(u,A)=G_-(u,A)$;

(b) $\Rightarrow$ (c) per la proposizione 2.12 esistono due insiemi ricchi $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$ tali che:

$F(u,A) = F_-(u,A) \qquad \forall u \in X$ e $\forall A \in \mathcal{R}'$

$G(u,A) = G_-(u,A) \qquad \forall u \in X$ e $\forall A \in \mathcal{R}''$.

Allora per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{R} = \mathcal{R}' \cap \mathcal{R}''$ si avrà $F(u,A)=G(u,A)$;

(c) $\Rightarrow$ (d) poichè un insieme ricco è anche denso, dall'implicazione (a) $\Rightarrow$ (b) segue che $F_-(u,A)=G_-(u,A)$ per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{E}$. Per la (2.2) $F_{\#}=G_{\#}$ e per la (2.1) $F_- \leq G \leq F_\#$ e $G_- \leq F \leq G_\#$. Segue, quindi, che $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}_G$ e $F(u,A)=G(u,A)$ per ogni $u \in X$ e $A \in \mathcal{R}_F$;

(d) $\Longrightarrow$(a) per la proposizione 2.13 , $\mathcal{R}_F$ è ricco e quindi denso in $\mathcal{E}$. ■

3 TEOREMA DI COMPATTEZZA PER UNA CLASSE DI FUNZIONALI

In questo capitolo definiamo una classe $\mathcal{G}$ di funzionali, contenente l'insieme dei funzionali ostacolo bilaterale, e proviamo un teorema di compattezza per la classe $\mathcal{G}$ rispetto alla Γ-convergenza.

§ 3.1 Definizione di $\mathcal{G}$

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\mathcal{B}$ (risp. $\mathcal{A}$) l'insieme dei boreliani (risp. aperti) con chiusura contenuta in Ω .

Definizione 3.1 Sia $\mathcal{G}$ la classe dei funzionali $G: H^2_{loc}(\Omega)\times\mathcal{B}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ che verificano:

(a) per ogni $A\in\mathcal{A}$, $u\longmapsto G(u,A)$ è semicontinua inferiormente su $H^2_{loc}(\Omega)$;

(b) per ogni $u\in H^2_{loc}(\Omega)$, $B\longmapsto G(u,B)$ è una misura positiva di Borel su Ω ;

(c) per ogni $u,v\in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $A\in\mathcal{A}$, $u_{|A}=v_{|A}$ implica $G(u,A)=G(v,A)$;

(d) per ogni $u,v\in H^2_{loc}(\Omega)$, $A\in\mathcal{A}$, $\varphi\in C^\infty(\Omega)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tali che $0\leq\alpha\leq\varphi(x)\leq\beta\leq 1$ per ogni $x\in A$, vale:

$$G(\varphi u+(1-\varphi)v, A)\leq \beta\, G(u,A)+(1-\alpha)\, G(v,A)$$

Osservazione 3.2 Dalle proprietà (b) e (c) segue che se $B\in\mathcal{B}$, $A\in\mathcal{A}$,

$u,v \in H^2_{loc}(\Omega)$, $B \subseteq A$, $u_{|A}=v_{|A}$, $G(u,A) < +\infty$, $G(v,A) < +\infty$, allora $G(u,B)=G(v,B)$. Notiamo che quest'ultima uguaglianza non è garantita se $u_{|B}=v_{|B}$.

Dall'ipotesi (d) segue che i funzionali della classe $\mathcal{G}$ sono convessi. La classe $\mathcal{G}$, inoltre, è contenuta nella classe dei funzionali considerata in [32] differenziandosi da questa solo per l'potesi (d).

Il teorema di compattezza che dimostriamo per $\mathcal{G}$ seguirà in grosse linee il teorema dimostrato dalla Picard in [32].

Esempi di funzionali appartenenti alla classe $\mathcal{G}$ sono i funzionali ostacolo unilaterale e bilaterale:

$$G_1(u,B) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{u} \geq h \quad C_{22}\text{-q.o. su } B \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$G_2(u,B) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \leq \tilde{u} \leq h \quad C_{22}\text{-q.o. su } B \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove f e h sono funzioni di Ω in $\mathbb{R}$ qualunque e $\tilde{u}$ denota il rappresentante quasi continuo di u relativamente alla capacità $C_{2,2}$ associata allo spazio H^2 (vedi definizione 1.1 e proposizione 1.3).

Un altro esempio è dato dai funzionali integrali del tipo:

$$G_3(u,B) = \int_B g(x,\tilde{u}(x))\,d\mu(x) + \nu(B)$$

dove

(a) l'applicazione $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow g(x,t) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ è boreliana su $\Omega \times \mathbb{R}$, semicontinua inferiormente e convessa in t;

(b) μ é una misura di Borel non negativa su Ω, nulla sugli insiemi di capacità $C_{2,2}$ nulla;

(c) ν é una misura di Borel non negativa su Ω .

In tutti questi esempi la semicontinuità dei funzionali é garantita dalla proposizione 1.4.

§ 3.2 Teorema di compattezza

Sia $\overline{\mathcal{B}}$ l'insieme di tutti i boreliani di Ω e sia $\Phi : H^2_{loc}(\Omega) \times \overline{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definito da:

$$(3.1) \qquad \Phi(u, B) = \int_B |\Delta u|^2 dx \qquad \forall B \in \overline{\mathcal{B}}$$

dove con Δ denotiamo il laplaciano su $H^2(\Omega)$.

Si vuole dimostrare il risultato principale di questo lavoro di tesi.

Sia $G \in \mathcal{G}$ e sia $G_{\#} : H^2_{loc}(\Omega) \times \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, il funzionale definito come nel capitolo 2 da $G_{\#} = sc^-(G_+)$ dove G_+ è il regolarizzato esterno di G. Allora per la proposizione 2.13 l'insieme

$$\mathcal{R}_G = \{ A \in \mathcal{A} : G(u, A) = G_{\#}(u, A) \quad \forall u \in H^2_{loc}(\Omega) \}$$

è ricco in $\mathcal{A}$.

Teorema 3.2 Sia G_h una successione di funzionali nella classe $\mathcal{G}$. Allora esistono una sottosuccessione G_{h_k} e un funzionale $G \in \mathcal{G}$ tali che

$$(3.2) \qquad \Phi(u,A) + G(u,A) = \Gamma(H^1(A)^-) \lim_{k\to\infty} \left[\Phi(u,A) + G_{h_k}(u,A) \right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $A \in \mathcal{R}_G$.

Dimostreremo prima alcuni lemmi che serviranno poi a caratterizzare il funzionale limite G come funzionale della classe $\mathcal{G}$.

Sia G_h una successione di funzionali in $\mathcal{G}$; poniamo:

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} \Phi(u,A) + G^-(u,A) &= \Gamma(H^1(A)^-) \liminf \left[\Phi(u,A) + G_h(u,A) \right] \\ \Phi(u,A) + G^+(u,A) &= \Gamma(H^1(A)^-) \limsup \left[\Phi(u,A) + G_h(u,A) \right] \end{aligned}$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Osservazione 3.3 Per la semicontinuità dei Γ^--limsup e Γ^--liminf (vedi osservazione 1.6) segue che per ogni $A \in \mathcal{A}$, $\Phi(u,A)+G^-(u,A)$ e $\Phi(u,A)+G^+(u,A)$ sono semicontinui inferiormente per la topologia $H^1(A)$. Poichè $\Phi(u,A)$ è continuo su $H^2_{loc}(\Omega)$ essendo $\bar{A} \subseteq \Omega$, $G^-(u,A)$ e $G^+(u,A)$ sono semicontinui inferiormente su $H^2_{loc}(\Omega)$.

Lemma 3.4 Per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A, A' \in \mathcal{A}$, $A \subseteq A'$ risulta:

$$G^-(u,A) \leq G^-(u,A') \quad \text{e} \quad G^+(u,A) \leq G^+(u,A')$$

<u>Dimostrazione</u> Siano $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A, A' \in \mathcal{A}$, $A \subsetneq A'$. Per la definizione di Γ^--liminf esiste una successione u_h in $H^2_{loc}(\Omega)$ tale che $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(A')$ e $G^-(u,A') = \liminf_{h\to\infty} \left[\Phi(u_h,A') - \Phi(u,A') + G_h(u_h,A')\right]$.

Se $G^-(u,A') = +\infty$ la tesi è ovvia. Supponiamo, quindi, $G^-(u,A') < +\infty$. Estraendo da u_h un opportuna sottosuccessione (che continueremo ad indicare con u_h) è possibile supporre che:

(a) $G^-(u,A') = \lim_{h\to\infty} \left[\Phi(u_h,A') - \Phi(u,A') + G_h(u,A')\right]$;

(b) $\sup_{h\in\mathbb{N}} \Phi(u_h,A') < +\infty$;

(c) $\Delta u_h \longrightarrow \Delta u$ debolmente in $L^2(A')$.

Da (c) segue che:

$$\Phi(u_h,A) - \Phi(u,A) = \int_A |\Delta(u_h-u)|^2 + 2\int_A \Delta(u_h-u)\Delta u \longrightarrow \int_A |\Delta(u_h-u)|^2$$

per $h \to \infty$ e lo stesso risultato vale su A'.

Poichè i G_h sono funzionali crescenti segue, quindi, che:

$$\begin{aligned}
G^-(u,A) &\le \liminf_{h\to\infty} \left[\Phi(u_h,A) - \Phi(u,A) + G_h(u_h,A)\right] \\
&= \liminf_{h\to\infty} \left[\int_A |\Delta(u_h-u)|^2 + G_h(u_h,A)\right] \\
&\le \liminf_{h\to\infty} \left[\int_{A'} |\Delta(u_h-u)|^2 + G_h(u_h,A')\right] \\
&= \lim_{h\to\infty} \left[\Phi(u_h,A') - \Phi(u,A') + G_h(u_h,A')\right] \\
&= G^-(u,A')
\end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che G^+ è crescente. ■

<u>Lemma</u> 3.5 G^- è un funzionale superadditivo, ossia per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A,B \in \mathcal{A}$ tali che $A \cap B = \emptyset$ risulta

$$G^-(u, A \cup B) \geq G^-(u, A) + G^-(u, B)$$

<u>Dimostrazione</u> Fissiamo $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A,B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$. Allora esiste una successione $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(A \cup B)$ tale che:

$$\Phi(u, A \cup B) + G^-(u, A \cup B) = \liminf_{h \to \infty} \left[\Phi(u_h, A \cup B) + G_h(u_h, A \cup B) \right]$$

Si ha, dunque, tenendo conto che $A \cap B = \emptyset$ e che i G_h essendo delle misure sono superadditivi:

$$G^-(u, A \cup B) \geq \liminf \left[\Phi(u_h, A) + G_h(u_h, A) \right] +$$

$$+ \liminf \left[\Phi(u_h, B) + G_h(u_h, B) \right] - \Phi(u, A) - \Phi(u, B)$$

$$\geq G^-(u, A) + G^-(u, B)$$ ■

<u>Lemma</u> 3.6 G^+ è un funzionale debolmente subadditivo, ossia per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A, A', B \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \subseteq A'$, risulta:

$$G^+(u, A \cup B) \leq G^+(u, A') + G^+(u, B)$$

<u>Dimostrazione</u> Siano $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A, A', B \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \subseteq A'$. Possiamo supporre:

(3.4) $\quad G^+(u, A') < +\infty \quad$ e $\quad G^+(u, B) < +\infty$

Per la definizione di Γ^--liminf esistono due successioni $u_h^{A'}$ e u_h^B in $H^2_{loc}(\Omega)$ tali che $u_h^{A'} \longrightarrow u$ in $H^1(A')$ e $u_h^B \longrightarrow u$ in $H^1(B)$ e

(3.5) $\quad \Phi(u, A') + G^+(u, A') = \limsup \left[\Phi(u_h^{A'}, A') + G_h(u_h^{A'}, A') \right]$

(3.6) $\quad \Phi(u, B) + G^+(u, B) = \limsup \left[\Phi(u_h^B, B) + G_h(u_h^B, B) \right]$

Fissata $\Theta \in C_0^\infty(A')$, $0 \leq \Theta \leq 1$, $\Theta = 1$ su A'' con $\bar{A} \subset A'' \subset \bar{A}'' \subset A'$, definiamo $u_h = \Theta u_h^{A'} + (1-\Theta) u_h^B$. Allora $u_h \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $u_h \to u$ in $H^1(A \cup B)$ e

(3.7) $\quad G^+(u, A \cup B) \leq \limsup_{h \to \infty} \left[\Phi(u_h, A \cup B) + G_h(u_h, A \cup B) \right] - \Phi(u, A \cup B)$

Siano u_{h_k} e G_{h_k} due sottosuccessioni di u_h e G_h tali che:

$$\lim_{h \to \infty} \left[\Phi(u_{h_k}, A \cup B) + G_{h_k}(u_{h_k}, A \cup B) \right] = \limsup_{h \to \infty} \left[\Phi(u_h, A \cup B) + G_h(u_h, A \cup B) \right]$$

Inoltre per la (3.4) possiamo scegliere la sottosuccessione u_{h_k} in modo tale $\Delta u_{h_k}^{A'} \longrightarrow \Delta u$ debolmente in $L^2(A')$, $\Delta u_{h_k}^B \longrightarrow \Delta u$ debolmente in $L^2(B)$ e quindi $\Delta u_{h_k} \longrightarrow \Delta u$ debolmente in $L^2(A \cup B)$. Per semplicità di notazione poniamo $(h_k) = (h)$.

Utilizzando l'additività dei funzionali G_h (ipotesi (b)), la proprietà di località data dall'osservazione 3.2 e l'ipotesi (d) con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si ottiene :

$$G_h(u_h, A\cup B) = G_h(u_h, \bar{A}\cap(A\cup B)) + G_h(u_h, B\cap(A'\setminus\bar{A})) + G_h(u_h, B\setminus A')$$

$$= G_h(u_h^{A'}, \bar{A}\cap(A\cup B)) + G_h(\theta u_h^{A'} + (1-\theta)u_h^{B}, B\cap(A'\setminus\bar{A})) + G_h(u_h^{B}, B\setminus A')$$

$$\leq G_h(u_h^{A'}, \bar{A}\cap(A\cup B)) + G_h(u_h^{A'}, B\cap(A'-\bar{A})) + G_h(u_h^{B}, B\cap(A'\setminus\bar{A})) +$$
$$+ G_h(u_h^{B}, B\setminus A')$$

$$\leq G_h(u_h^{A'}, A') + G_h(u_h^{B}, B)$$

Nell'ultima disuguaglianza si utilizzano le inclusioni :

$$(\bar{A}\cap(A\cup B))\cup(B\cap(A'\setminus\bar{A})) \subset A'$$

e

$$(B\cap(A'\setminus\bar{A}))\cup(B\setminus A')) \subset B$$

Resta, quindi, da maggiorare $\Phi(u_h, A\cup B) - \Phi(u, A\cup B)$.

Poniamo $z_h^{A'} = u_h^{A'} - u$, $z_h^{B} = u_h^{B} - u$, $z_h = \theta z_h^{A'} + (1-\theta)z_h^{B} = u_h - u$.

Allora $z_h^{A'} \longrightarrow 0$ in $H^1(A')$, $z_h^{B} \longrightarrow 0$ in $H^1(B)$ e $z_h \longrightarrow 0$ in $H^1(A\cup B)$.

Si ha allora :

$$\Phi(u_h, A\cup B) - \Phi(u, A\cup B) = \int_{A\cup B} |\Delta u_h|^2 - \int_{A\cup B} |\Delta u|^2$$

$$= \int_{A\cup B} |\Delta z_h + \Delta u|^2 - \int_{A\cup B} |\Delta u|^2$$

$$= \int_{A\cup B} |\Delta z_h|^2 + 2\int_{A\cup B} \Delta z_h \Delta u$$

dove $\int_{A\cup B} \Delta z_h \Delta u \to 0$ per $h \to \infty$ poichè $\Delta z_h \longrightarrow 0$ debolmente in $L^2(A\cup B)$.

Ma $\Delta z_h = \theta \Delta z_h^{A'} + (1-\theta)\Delta z_h^B + \Delta\theta(z_h^{A'} - z_h^B) + 2\nabla\theta\cdot\nabla(z_h^{A'} - z_h^B)$ e quindi:

$$\int_{A\cup B} |\Delta z_h|^2 = \int_{A\cup B} |\theta\Delta z_h^{A'} + (1-\theta)\Delta z_h^B|^2 + \int_{B\cap(A'\setminus\bar{A})} |\Delta\theta(z_h^{A'} - z_h^B) + 2\nabla\theta\cdot\nabla(z_h^{A'} - z_h^B)|^2 +$$

$$(3.8)$$

$$+ 2\int_{B\cap(A'\setminus\bar{A})} (\theta\Delta z_h^{A'} + (1-\theta)\Delta z_h^B)(\Delta\theta(z_h^{A'} - z_h^B) + 2\nabla\theta\cdot\nabla(z_h^{A'} - z_h^B))$$

Il secondo ed il terzo termine a destra nella (3.8) tendono a zero per $h \to \infty$ poichè $z_h^{A'}$, z_h^B tendono a zero in $H^1(B\cap(A'\setminus\bar{A}))$ e $\Delta z_h^{A'}$, Δz_h^B tendono a zero debolmente in $L^2(B\cap(A'\setminus\bar{A}))$.

Quindi per convessità si ottiene:

$$\begin{aligned}\Phi(u_h, A\cup B) - \Phi(u, A\cup B) &\le \int_{A\cup B} \theta|\Delta z_h^{A'}|^2 + (1-\theta)|\Delta z_h^B|^2 + C_h \\ &\le \int_{(A\cup B)\cap A'} |\Delta z_h^{A'}|^2 + \int_{(A\cup B)\setminus A'} |\Delta z_h^B|^2 + C_h \\ &\le \int_{A'} |\Delta z_h^{A'}|^2 + \int_B |\Delta z_h^B|^2 + C_h\end{aligned}$$

dove $\lim_{h\to\infty} C_h = 0$.

Dalla (3.7) e da (3.5) e (3.6) si avrà, quindi:

$$\begin{aligned}G^+(u, A\cup B) &\le \limsup\left[\int_{A'} |\Delta z_h^{A'}|^2 + G_h(u_h^{A'}, A')\right] + \\ &\quad + \limsup\left[\int_B |\Delta z_h^B|^2 + G_h(u_h^B, B)\right] \\ &= \limsup\left[\int_{A'} |\Delta u_h^{A'} - u|^2 + G_h(u_h^{A'}, A')\right] + \\ &\quad + \limsup\left[\int_B |\Delta(u_h^B - u)|^2 + G_h(u_h^B, B)\right]\end{aligned}$$

$$\leq \limsup \left[\int_{A'} |\Delta u_h^{A'}|^2 - \int_{A'} |\Delta u|^2 + G_h(u_h^{A'}, A') \right] +$$

$$+ \limsup \left[\int_{B} |\Delta u_h^{B}|^2 - \int_{B} |\Delta u|^2 + G_h(u_h^{B}, B) \right]$$

$$\leq G^+(u, A') + G^+(u, B)$$

L'ultima disuguaglianza segue dalle (3.5) e (3.6) e dal fatto che $u_h^{A'}$ e u_h^{B} sono sottosuccessioni delle successioni di partenza.

<u>Lemma</u> 3.7 Siano u,v $H^2_{loc}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $0 \leq \alpha \leq \varphi(x) \leq \beta \leq 1$ per ogni $x \in A$, allora

$$G^+(\varphi u + (1-\varphi)v, A) \leq \beta\, G^+(u, A) + (1-\alpha)\, G^+(v, A)$$

<u>Dimostrazione</u> Possiamo supporre $G^+(u,A) < +\infty$ e $G^+(v,A) < +\infty$.
Esistono due successioni $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(A)$ e $v_h \longrightarrow v$ in $H^1(A)$ tali che

$$(3.9) \qquad G^+(u, A) = \limsup \left[\int_A |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A) \right] - \int_A |\Delta u|^2$$

$$(3.10) \qquad G^+(v, A) = \limsup \left[\int_A |\Delta v_h|^2 + G_h(v_h, A) \right] - \int_A |\Delta u|^2$$

Procedendo come nella dimostrazione del lemma 3.6, possiamo scegliere sottosuccessioni u_{h_k}, v_{h_k}, G_{h_k} tali che

$$\lim \left[\int_A |(\varphi u_{h_k} + (1-\varphi) v_{h_k}|^2 + G_h(\varphi u_{h_k} + (1-\varphi) v_{h_k}, A) \right] =$$

$$= \limsup \left[\int_A |\varphi u_h + (1-\varphi) v_h|^2 + G_h(\varphi u_h + (1-\varphi) v_h, A) \right]$$

$\Delta u_{h_k} \rightharpoonup \Delta u$ debolmente in $L^2(A)$ e $\Delta v_{h_k} \rightharpoonup \Delta v$ debolmente in $L^2(A)$.

Poniamo nuovamente $(h_k) = (h)$. Avremo :

(3.11) $$\int_A |\Delta u_h|^2 - \int_A |\Delta u|^2 = \int_A |\Delta(u_h - u)|^2 + 2\int_A \Delta(u_h - u)\Delta u$$

dove $\int_A \Delta(u_h - u)\Delta u \to 0$.

Analogo risultato si ottiene sostituendo u_h e u rispettivamente con v_h e v, oppure con $\varphi u_h + (1-\varphi)v_h$ e $\varphi u + (1-\varphi)v$.

Si avrà dunque, per definizione di Γ^--limsup e per la (3.11),

(3.12) $$\begin{aligned} G^+(\varphi u + (1-\varphi)v, A) &\le \limsup \Big[\int_A |\Delta(\varphi u_h + (1-\varphi)v_h)|^2 - \\ &\quad - \int_A |\Delta(\varphi u + (1-\varphi)v)|^2 + G_h(\varphi u_h + (1-\varphi)v_h, A)\Big] \\ &\le \limsup \Big[\int_A |\Delta(\varphi(u_h - u) + (1-\varphi)(v_h - v))|^2 + \\ &\quad + G_h(\varphi u_h + (1-\varphi)v_h, A)\end{aligned}$$

D'altra parte, poiché

$$\begin{aligned}\Delta[\varphi(u_h - u) + (1-\varphi)(v_h - v)] &= \Delta\varphi[(u_h - u) - (v_h - v)] + \\ &+ \varphi\Delta(u_h - u) + (1-\varphi)\Delta(v_h - v) + 2\nabla\varphi[\nabla(u_h - u) - \nabla(v_h - v)]\end{aligned}$$

e ciascuno dei seguenti integrali

$$\int_A |\Delta\varphi[(u_h - u) - (v_h - v)]|^2$$

$$\int_A \nabla\varphi|\nabla(u_h - u) - \nabla(v_h - v)|^2$$

$$\int_A \{\Delta\varphi[(u_h - u) - (v_h - v)]\}\{\nabla\varphi[\nabla(u_h - u) - \nabla(v_h - v)]\}$$

$$\int_A \{\Delta\varphi\,[(u_h-u)-(v_h-v)]\}\,\{\varphi\,\Delta(u_h-u)+(1-\varphi)\,\Delta(v_h-v)\}$$

$$\int_A \{\nabla\varphi\,[\nabla(u_h-u)-\nabla(v_h-v)]\}\,\{\varphi\,\Delta(u_h-u)+(1-\varphi)\,\Delta(v_h-v)\}$$

converge a zero, si avrà da (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) e dalla proprietà (d) di cui godono i funzionali G_h :

$$G^+(\varphi u+(1-\varphi)v, A) \leq$$

$$\leq \limsup \Big[\int_A |\varphi\Delta(u_h-u)+(1-\varphi)\Delta(v_h-v)|^2 + G_h(\varphi u_h+(1-\varphi)v_h, A)\Big)$$

$$\leq \limsup \Big[\int_A \varphi\,|\Delta(u_h-u)|^2+(1-\varphi)\,|\Delta(v_h-v)|^2 + G_h(\varphi u_h+(1-\varphi)v_h, A)\Big)$$

$$\leq \limsup \Big[\int_A \beta\,|\Delta(u_h-u)|^2+(1-\alpha)\,|\Delta(v_h-v)|^2 + \beta\, G_h(u_h, A)+(1-\alpha)\,G_h(v_h, A)\Big)$$

$$\leq \limsup \Big[\int_A \beta\,|\Delta u_h|^2 - \int_A \beta\,|\Delta u|^2 + \beta\, G_h(u_h, A)\Big] +$$

$$+ \limsup \Big[(1-\alpha)\int_A |\Delta v_h|^2 - (1-\alpha)\int_A |\Delta v|^2 + (1-\alpha)\,G_h(v_h, A)\Big]$$

$$\leq \beta\, G^+(u, A) + (1-\alpha)\,G^+(v, A) \qquad \blacksquare$$

<u>Dimostrazione del teorema 3.2</u> Sia $\mathcal{D}$ un insieme numerabile di aperti denso in $\mathcal{A}$. Per il teorema di compattezza (teorema 1.9), esiste una sottosuc

cessione G_{h_k} di G_h tale ché, per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $D \in \mathcal{D}$, esiste il

$$\Gamma(H^1(D)^-) \lim_{\substack{k \to \infty \\ v \to u}} [\Phi(v, D) + G_{h_k}(v, D)]$$

Siano G^- e G^+ i funzionali definiti dalle (3.3) per la sottosuccessione G_{h_k}. Risulta quindi

$$G^-(u, D) = G^+(u, D) \qquad \forall u \in H^2_{loc}(\Omega) \quad e \quad \forall D \in \mathcal{D}$$

Definiamo il funzionale $G : H^2_{loc}(\Omega) \times \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ nel modo seguente : per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$(3.13) \qquad G(u, A) = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-(u, A') = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^+(u, A')$$

Notiamo che il funzionale G é ben definito sugli aperti poiché G^- e G^+ coincidono su di un insieme denso in $\mathcal{A}$ e dunque i due estremi superiori che intervengono nelle definizioni coincidono.

Estendiamo la definizione di G ai boreliani ponendo

$$G(u, B) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ B \subseteq A}} G(u, A)$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $B \in \mathcal{B}$.

Per il lemma 3.4 i funzionali G^- e G^+ sono crescenti, ed essendo semicontinui inferiormente su $H^2_{loc}(\Omega)$ (osservazione 3.3), siamo in grado di applicare ad essi la proposizione 2.14. Pertanto $G^-(u,A) = G^+(u,A) \quad \forall u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $\forall A \in \mathcal{R}_G$, e dalla definizione di G^- e G^+ :

$$\Phi(u,A) + G(u,A) = \Gamma(H^1(A)^-) \lim_{\substack{v \to u \\ k \to \infty}} \left[\Phi(v,A) + G_{h_k}(v,A) \right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $A \in \mathcal{R}(G)$.

Resta da dimostrare che $G \in \mathcal{G}$, ossia che G verifica le proprietà (a), (b), (c) e (d) della definizione di $\mathcal{G}$.

(a) L'applicazione $u \longmapsto G(u,A)$ é semicontinua inferiormente su $H^2_{loc}(\Omega)$ poiché é estremo superiore di funzioni semicontinue inferiormente su $H^2_{loc}(\Omega)$ (osservazione 3.3);

(b) dai lemmi 3.4, 3.5, 3.6 e dalla (3.13) segue che la funzione $A \longmapsto G(u,A)$ é crescente, subadditiva, superadditiva e internamente regolare sugli aperti. Quindi per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ la funzione $B \longmapsto G(u,B)$ é una misura di Borel su Ω (proposizione 2.7);

(c) per definizione di G^+ , per ogni $u,v \in H^2_{loc}(\Omega)$ con $u = v$ su $A \in \mathcal{A}$, si ha $G^+(u,A) = G^+(v,A)$. Poiché

$$G(u,A) = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G(u,A')$$

si deduce che, se $u = v$ su A, allora $G(u,A) = G(v,A)$;

(d) dal lemma 3.7 segue che, per ogni $u,v \in H^2_{loc}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq 1$ su A, si ha

$$G^+(\varphi u + (1-\varphi)v, A) \leq \beta\, G^+(u,A) + (1-\alpha)\, G^+(v,A)$$

e, per la (3.13), la stessa proprietà vale anche per il funzionale G. ∎

4 CONDIZIONI AL CONTORNO

Vogliamo ora studiare i Γ-limiti di successioni di funzionali del tipo considerato nel capitolo precedente a cui vengano assegnate condizioni al contorno di Dirichlet sul bordo di Ω. A tale scopo dovremo dapprima dimostrare il seguente risultato :

Teorema 4.1 Sia G_h una successione di funzionali della classe $\mathcal{G}$ e sia G un funzionale in $\mathcal{G}$. Allora

$$\Phi(u,A)+G(u,A)=\Gamma(H^1(A)^-)\lim_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,A)+G_h(v,A)\right] \tag{4.1}$$

per ogni $u\in H^2_{loc}$ e per ogni $A\in\mathcal{R}_G$ se e solo se

$$\Phi(u,\Omega)+G(u,A)=\Gamma(H^1(\Omega)^-)\lim_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v,A)\right] \tag{4.2}$$

per ogni $u\in H^2_{loc}$ e per ogni $A\in\mathcal{R}_G$.

Per la dimostrazione del teorema avremo bisogno del lemma 4.2 che segue.

Sia G_h una successione in $\mathcal{G}$. Accanto ai funzionali $G^-(u,A)$ e $G^+(u,A)$ definiti in 3.3 consideriamo i funzionali $G^-(u,A)$ e $G^+(u, A)$ definiti da:

$$\begin{aligned}&\Phi(u,\Omega)+G^-_\Omega(u,A)=\Gamma(H^1(\Omega)^-)\liminf_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v,A)\right]\\ &\Phi(u,\Omega)+G^+_\Omega(u,A)=\Gamma(H^1(\Omega)^-)\limsup_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v,A)\right]\end{aligned} \tag{4.3}$$

per ogni $u\in H^2_{loc}(\Omega)$ e $A\in\mathcal{A}$.

Lemma 4.2 Siano $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, con $u \in L^2(\Omega)$ e $A, A' \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \subseteq A'$.

Allora :

(a) $G^-_{\Omega}(u,A) \leq G^-(u,A')$; $G^+_{\Omega}(u,A) \leq G^+(u,A')$

(b) $G^-(u,A) \leq G^-_{\Omega}(u,A)$; $G^+(u,A) \leq G^+_{\Omega}(u,A)$

Dimostrazione

(a) Possiamo supporre che $G^-(u,A') < +\infty$. Fissata $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, sia $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(A)$, tale che

$$\Phi(u,A') + G^-(u,A') = \liminf \left[\Phi(u_h, A') + G_h(u_h, A') \right] \tag{4.4}$$

Possiamo passare ad una sottosuccessione, che continueremo a chiamare u_h, per la quale

$$\Phi(u,A') + G^-(u,A') = \lim \left[\Phi(u_h, A') + G_h(u_h, A') \right]$$

e $\Delta u_h \longrightarrow \Delta u$ nella topologia debole di $L^2(A')$.

Sia $A^* \in \mathcal{A}$ tale che $\bar{A} \subseteq A^* \subseteq \bar{A}^* \subseteq A'$ e sia $\theta \in C^\infty_0(\Omega)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ su $\bar{A}^*$ e $\theta = 0$ su $\Omega - A'$, e sia $v_h = \theta u_h + (1-\theta)u$. Allora $v_h \in H^2_{loc}(\Omega)$, $v_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega)$ e $\Delta v_h \longrightarrow \Delta u$ nella topologia debole di $L^2(\Omega)$.

Quindi :

$$\Phi(v_h, \Omega) = \int_\Omega |\Delta v_h|^2 = \int_\Omega |\theta \Delta u_h + (1-\theta)\Delta u|^2 +$$

$$+ \int_\Omega |\Delta\theta(u_h - u) + 2 D\theta D(u_h - u)|^2 + 2\int_\Omega (\theta\Delta u_h + (1-\theta)\Delta u) \cdot$$

$$\cdot (\Delta\theta(u_h - u) + 2D\theta D(u_h - u))$$

e gli ultimi due integrali a destra tendono a zero per $h \longrightarrow \infty$.

D'altra parte :

$$\Phi(u,\Omega) + G^-_\Omega(u,A) \le$$

$$\le \liminf_{h\to\infty} \left[\Phi(v_h,\Omega) + G_h(v_h, A)\right]$$

$$\le \liminf \left[\int_\Omega |\theta\Delta u_h + (1-\theta)\Delta u|^2 + G_h(v_h, A)\right]$$

$$\le \liminf \left[\int_\Omega \theta|\Delta u_h|^2 + \int_\Omega (1-\theta)|\Delta u|^2 + G_h(u_h, A)\right]$$

$$\le \liminf \left[\int_A |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A')\right] + \int_{\Omega\setminus\bar{A}^*} |\Delta u|^2$$

Nelle ultime due disuguaglianze si é tenuto conto del fatto che $u_h = v_h$ su A e che i G_h sono funzionali locali.

Dalla (4.4) segue quindi

$$\int_{\bar{A}^*} |\Delta u|^2 + G^-_\Omega(u,A) \le \int_{A'} |\Delta u|^2 + G^-(u,A')$$

Facendo tendere A* ad A' si ottiene la tesi.

(b) Sia $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega)$, tale che

$$\Phi(u,\Omega) + G^-_\Omega(u,A) = \liminf \left[\Phi(u_h,\Omega) + G_h(u_h, A)\right]$$

Consideriamo anche qui una sottosuccessione, che continuiamo a chiamare u_h, per cui il liminf éun limite e $\Delta u_h \longrightarrow \Delta u$ debolmente in $L^2(\Omega)$. Allora

$$\Phi(u,\Omega) + G^-(u,A) = \Phi(u,A) + G^-(u,A) + \Phi(u,\Omega\setminus A) \le$$

$$\leq \liminf \left[\Phi(u_h, A) + G_h(u_h, A)\right] + \liminf \Phi(u_h, \Omega \setminus A)$$

$$\leq \Phi(u, \Omega) + G^-_\Omega(u, A)$$

da cui $G^-(u,A) \leq G^-_\Omega(u,A)$.

In modo analogo si dimostrano le stesse disuguaglianze per G^+. ■

Dimostrazione del teorema 4.1 Sia $A \in \mathcal{A}$ e $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, con $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $A'_\varepsilon \in \mathcal{A}$, $\bar{A}'_\varepsilon \subseteq A$, tale che

$$\sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-(u, A') < G^-(u, A'_\varepsilon) + \varepsilon$$

Dalla parte (b) del lemma 4.2 segue dunque che

$$(4.5) \quad \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-(u, A') < G^-_\Omega(u, A'_\varepsilon) + \varepsilon \leq \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-_\Omega(u, A') + \varepsilon$$

D'altra parte, per ogni $\eta > 0$, esiste $A'_\eta \in \mathcal{A}$, $\bar{A}'_\eta \subseteq A$, tale che

$$\sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-_\Omega(u, A') < G^-_\Omega(u, A'_\eta) + \eta$$

Sia $A^* \in \mathcal{A}$, tale che $\bar{A}'_\eta \subseteq A^* \subseteq \bar{A}^* \subseteq A$. Allora, dalla parte (a) del lemma 4.2,

segue che $G^-_\Omega(u, A'_\eta) \leq G^-(u, A^*)$ e quindi

$$(4.6) \quad \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-_\Omega(u, A') < G^-(u, A^*) + \eta \leq \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-(u, A') + \eta$$

Per l'arbitrarietà di ε e di η, dalle (4.5), (4.6), si ha quindi

(4.7) $$\sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-_\Omega(u, A') = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-(u, A')$$

Analogamente si può dimostrare che

(4.8) $$\sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^+_\Omega(u, A') = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^+(u, A')$$

Se vale le (4.1), allora, per definizione di G^- e G^+, si ha

$$G(u,A) = G^-(u,A) = G^+(u,A)$$

per ogni $u \in H^2_{loc}$ e per ogni $A \in \mathcal{R}_G$.

Utilizzando l'implicazione (c) $\Rightarrow$ (b) della proposizione 2.14 e la regolarità interna di G, si ottiene

$$G(u, A) = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-(u, A') = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^+(u, A')$$

da cui, per la (4.7) e (4.8) :

(4.9) $$G(u, A) = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^-_\Omega(u, A') = \sup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ \bar{A}' \subseteq A}} G^+_\Omega(u, A')$$

I funzionali $G^-_\Omega(u,\circ)$ e $G^+_\Omega(u,\circ)$ sono crescenti su $\mathcal{A}$ perché lo sono i G_h e $u \longmapsto G^-_\Omega(u,A)$, $u \longmapsto G^+_\Omega(u,A)$ sono semicontinui inferiormente per la topologia forte $H^2_{loc}(\Omega)$ (vale per essi un ragionamento analogo a quello fatto nell'osservazione 3.3).

Quindi, utilizzando l'implicazione (b) $\Rightarrow$ (d) della proposizione 2.14, dalla (4.9) si ottiene

$$G(u,A) = G^-_\Omega(u,A) = G^+_\Omega(u,A)$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$, che equivale alla (4.2).

L'implicazione opposta si dimostra in maniera analoga. ∎

Consideriamo ora il caso delle condizioni di Dirichlet.

Fissata $w \in H^2_{loc}(\Omega)$, con $\Delta w \in L^2(\Omega)$, siano F_h ed F i funzionali da $H^2_{loc}(\Omega) \times \mathcal{A}$ in $\overline{\mathbb{R}}_+$ così definiti :

$$F_h(u,A) = \begin{cases} \Phi(u,\Omega) + G_h(u,A) & \text{se } u-w \in H^2_0(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(4.10)

$$F(u,A) = \begin{cases} \Phi(u,\Omega) + G(u,A) & \text{se } u-w \in H^2_0(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$.

<u>Teorema</u> 4.3 Siano G_h e G una successione ed un funzionale in $\mathcal{G}$, $A \in \mathcal{A}$, tali che

$$\Phi(u,\Omega) + G(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} \left[\Phi(v,\Omega) + G_h(v,A)\right] \tag{4.11}$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Allora :

$$F(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(v,A)$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

<u>Osservazione</u> 4.4 Lo stesso risultato si ottiene se la condizione : $u-w \in H^2_0(\Omega)$ nella definizione 4.10 é sostituita dalla condizione : $u-w \in H^2_{loc}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione Fissata $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, basta dimostrare che

(a) per ogni $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega)$, $F(u,A) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(u_h,A)$;

(b) esiste $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega)$, tale che $F(u,A) \geq \limsup_{h\to\infty} F_h(u_h,A)$.

(a) Sia u_h una qualunque successione in $H^2_{loc}(\Omega)$ che converga ad u nella norma $H^1(\Omega)$.

Basta considerare il caso $\liminf_{h\to\infty} F_h(u_h) < +\infty$. In tal caso esiste una sottosuccessione tale che

(4.12) $$\lim_{k\to\infty} F_{h_k}(u_{h_k}) < +\infty$$

e quindi $u_{h_k} - w \in H^2_0(\Omega)$ e $\sup_k \int_\Omega |\Delta u_{h_k}|^2 < +\infty$

Queste due condizioni implicano che la successione $u_{h_k} - w$ sia limitata in $H^2(\Omega)$. Pertanto esiste una sottosuccessione $u_{h_{k_i}}$ tale che $u_{h_{k_i}} - w$ converge debolmente ad $u - w$ in $H^2(\Omega)$.

Ciò dimostra che $u - w \in H^2_0(\Omega)$.

Si ha dunque, per le (4.10) e (4.11) :

$$F(u,A) = \Phi(u,\Omega) + G(u,A) \leq \liminf_{h\to\infty} \Phi(u,\Omega) + G_h(u_h,A) \leq \liminf F_h(u_h,A)$$

(b) Sia $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Se $u - w \notin H^2_0(\Omega)$, si può scegliere $u_h = u$ ed in tal caso si ha $F(u,A) = +\infty = \lim_h F_h(u_h,A)$.

Se $u - w \in H^2_0$, allora

$$F(u,A) = \int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A)$$

e per la (4.11) esiste una successione v_h in $H^2_{loc}(\Omega)$ che converge ad u nella norma $H^1(\Omega)$, tale che

$$F(u,A) = \int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A) = \lim_{h\to\infty} \int_\Omega |\Delta v_h|^2 + G_h(v_h, A)$$

Modifichiamo le funzioni v_h in un intorno di $\partial\Omega$ in modo tale che siano verificate le condizioni al contorno.

Sia A un aperto in Ω tale che $\bar{A} \subseteq A' \subseteq \bar{A}' \subseteq \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ su A' e $u_h = \varphi v_h + (1-\varphi)u$.

Allora, per ogni h, si ha $u_h \in H^2_{loc}(\Omega)$, $u_h - w \in H^2_0(\Omega)$, $u_h = v_h$ su A e $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega)$. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\int_\Omega |\Delta u_h|^2 = \int_\Omega |\varphi \Delta v_h + (1-\varphi)\Delta u) + 2D\varphi(Dv_h - Du) + \Delta\varphi(v_h - u)|^2$$

$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_\Omega |\varphi \Delta v_h + (1-\varphi)\Delta u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |2D\varphi(Dv_h - Du) + \Delta\varphi(v_h - u)|^2$$

$$\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_\Omega |\Delta v_h|^2 + \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{\Omega - A'} |\Delta u|^2 + C_h$$

dove $\lim_{h\to\infty} C_h = 0$ poiché $v_h \longrightarrow u$ nella norma $H^1(\Omega)$.

Così, per la località dei G_h :

$$\limsup_{h\to\infty} F_h(u_h, A) = \limsup_{h\to\infty} \int_\Omega |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A)$$

$$\leq \limsup_{h\to\infty} \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\int_\Omega |\Delta v_h|^2 + G_h(v_h, A)\right] + \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{\Omega - A'} |\Delta u|^2$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} F(u,A) + \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{\Omega - A'} |\Delta u|^2$$

Facendo tendere ε a zero e poi A' ad Ω si ha

$$F(u,A) \geq \limsup_{h\to\infty} F_h(u_h, A)$$

che é quanto si voleva dimostrare. ■

Vogliamo ora dimostrare un teorema inverso del teorema 4.3, ossia vogliamo far vedere come dalla Γ-convergenza di problemi con condizioni al contorno si possa dedurre quella dei corrispondenti problemi senza condizioni al contorno.

Teorema 4.5 Sia G_h e G una successione e un elemento della classe $\mathcal{G}$. Sia $w \in H^2_{loc}(\Omega)$, con $\Delta w \in L^2(\Omega)$, e siano F ed F_h i funzionali definiti nella (4.10), e sia $A \in \mathcal{A}$.

Supponiamo che

$$(4.13) \qquad F(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(v,A)$$

Allora

$$\Phi(u,\Omega) + G(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} \left[\Phi(v,\Omega) + G(v,A)\right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Per la dimostrazione del teorema avremo bisogno del lemma 4.6 che segue.

Siano $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $Y \in H^2_{loc}(\Omega)$, con $\Delta Y \in L^2(\Omega)$.

Per ogni $z \in H^2_{loc}(\Omega)$ poniamo $z' = \varphi z + (1-\varphi)Y$ e

$$R(z) = \int_\Omega |\Delta z'|^2 - \int_\Omega \varphi^2 |\Delta z|^2$$

<u>Lemma</u> 4.6 Siano z_h una successione in $H^2_{loc}(\Omega)$ e $z \in H^2_{loc}$ tali che $z_h \longrightarrow z$ nella topologia forte di $H^1(\Omega)$ e $\Delta z_h \rightharpoonup \Delta z$ nella topologia debole di $L^2(\Omega)$. Allora

$$R(z) = \lim_{h\to\infty} R(z_h)$$

<u>Dimostrazione</u> Con un calcolo esplicito si ottiene

$$R(z) = \int_\Omega (1-\varphi)^2 |\Delta Y|^2 + 2\int_\Omega \varphi(1-\varphi)\Delta z \Delta Y + \int_\Omega |2D\varphi(Dz-DY)|^2$$

$$+ \int_\Omega |\Delta\varphi(z-Y)|^2 + \int_\Omega (\varphi\Delta z + (1-\varphi)\Delta Y)(2D\varphi(Dz-DY))$$

$$+ \int_\Omega (\varphi\Delta z + (1-\varphi)\Delta Y)(\Delta\varphi(z-Y)) + \int_\Omega (2D\varphi(Dz-DY))(\Delta\varphi(z-Y))$$

e un'espressione analoga si ottiene per $R(z_h)$. Basta a questo punto tener conto del fatto che $z_h \longrightarrow z$ in $H^1(\Omega)$ e $\Delta z_h \rightharpoonup \Delta z$ debolmente in $L^2(\Omega)$ per ottenere la tesi. ∎

<u>Dimostrazione del teorema 4.5</u> Bisogna dimostrare che qualunque sia $u \in H^2_{loc}(\Omega)$:

(a) per ogni successione u_h in $H^2_{loc}(\Omega)$, $u_h \to u$ in $H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A) \le \liminf_{h\to\infty} \left[\int_\Omega |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A) \right]$$

(b) esiste una successione u_h in $H^2_{loc}(\Omega)$, $u_h \to u$ in $H^1(\Omega)$, tale che

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A) \ge \limsup_{h\to\infty} \left[\int_\Omega |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A) \right]$$

(a) Sia $u_h \to u$ in $H^1(\Omega)$, $A' \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \subseteq A' \subseteq \bar{A}' \subseteq \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ su A', $u' = \varphi u + (1-\varphi)w$, $u'_h = \varphi u_h + (1-\varphi)w$.

Allora $u' - w \in H^2_0(\Omega)$, $u' = u$ su A, $u'_h - w \in H^2_0(\Omega)$, $u'_h = u_h$ su A e $u'_h \to u'$ in $H^1(\Omega)$.

Dall'ipotesi (4.13) segue quindi che

$$\int_\Omega |\Delta u'|^2 + G(u',A) \le \liminf \left[\int_\Omega |\Delta u'_h|^2 + G_h(u'_h, A) \right]$$

Dal lemma 4.6 e dalla località di G_h e G segue che

$$\int_\Omega \varphi^2 |\Delta u|^2 + G(u,A) \le \liminf_{h\to\infty} \left[\int_\Omega \varphi^2 |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A) \right]$$

e quindi, tenendo conto del fatto che $\varphi = 1$ su A' e $\int_{\Omega\setminus A'} \varphi^2 |\Delta u|^2 \ge 0$

$$\int_{A'} |\Delta u|^2 + G(u,A) \le \liminf_{h\to\infty} \left[\int_\Omega |\Delta u_h|^2 + G_h(u_h, A) \right]$$

Facendo poi tendere A' ad Ω si ottiene la tesi.

(b) Si può supporre che $G(u,A) < +\infty$. Sia $A' \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \subseteq A' \subseteq \bar{A}' \subseteq \Omega$, $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \Psi \le 1$, $\Psi = 1$ su A', $v = \Psi u + (1-\Psi)w$.

Allora $v - w \in H^2_0(\Omega)$, $v = u$ su A' e per la (4.13) esiste una successione v_h in $H^2_{loc}(\Omega)$, $v_h \longrightarrow v$ in $H^1(\Omega)$, tale che

$$\int_\Omega |\Delta v|^2 + G(v, A) = \lim_{h\to\infty} F_h(v_h, A)$$

Poiché

$$\int_\Omega |\Delta v|^2 + G(v, A) < +\infty$$

si ha $v_h - w \in H^2_0(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |\Delta v|^2 + G(v, A) = \lim_{h\to\infty} \left[\int_\Omega |\Delta v_h|^2 + G_h(v_h, A)\right] \tag{4.14}$$

Siano ora $A'', A''' \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \subseteq A''' \subseteq \bar{A}''' \subseteq A'' \subseteq \bar{A}'' \subseteq A'$, $\varphi \in C^\infty_0(A'')$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ su A''' e $u_h = \varphi v_h + (1-\varphi)u$.

Allora $u_h = v_h$ su A''' e $u_h \longrightarrow \varphi v + (1-\varphi)u = u$ (poiché supp $\varphi \subseteq \{\psi = 1\}$) in $H^1(\Omega)$.

Poiché per semicontinuità ($\Delta v_h \rightharpoonup \Delta v$ debolmente in $L^2(\Omega)$)

$$\int_\Omega (1-\varphi^2)|\Delta v|^2 \leq \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega (1-\varphi^2)|\Delta v_h|^2$$

segue allora dalla (4.14) che

$$\int_\Omega \varphi^2 |\Delta v|^2 + G(v, A) \geq \limsup \left[\int_\Omega \varphi^2 |\Delta v_h|^2 + G_h(v_h, A)\right]$$

Utilizzando ancora il lemma 4.6, si ha dunque

$$\Phi(u,\Omega) - G(u,A) = \int_\Omega \varphi^2 |\Delta v|^2 + G(v,A) + R(v)$$

$$\geq \limsup_{h\to\infty} \Big[\int_\Omega \varphi^2 |\Delta v_h|^2 + G_h(v_h, A) \Big] + \lim_{h\to\infty} R(v_h)$$

$$\geq \limsup \big[\Phi(u_h,\Omega) + G_h(u_h, A) \big] \qquad \blacksquare$$

5 CONVERGENZA DEI MINIMI

In questo capitolo applichiamo irisultati dimostrati nei capitoli precedenti allo studio della convergenza di soluzioni di problemi di minimo per funzionali della forma

$$\Phi(u,\Omega) + G(u,A) + H(u,\Omega)$$

dove $\Phi(u,\Omega)=\int_\Omega |\Delta u|^2$, G é un funzionale della classe $\mathcal{G}$ e H é un funzionale integrale del tipo introdotto nella definizione seguente.

Definizione 5.1 Sia $h : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Borel con le seguenti proprietà :

(a) per ogni $x\in\Omega$ la funzione $s \longmapsto h(x,s)$ é continua su $\mathbb{R}$;

(b) esistono $a\in L^1(\Omega)$, $c,C\in\mathbb{R}$, $0<c<C$, tali che

$$- a(x) + c\,|s|^2 \leq h(x,s) \leq a(x) + C\,|s|^2$$

Definiamo il funzionale $H : H^2_{loc}(\Omega) \times \overline{\mathcal{B}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nel seguente modo :

$$H(u,B) = \int_B h(x,u(x))\,dx \tag{5.1}$$

per ogni $u\in H^2_{loc}(\Omega)$ e $B\in\overline{\mathcal{B}}$.

Osservazione 5.2 H é un funzionale continuo nella topologia $L^2(\Omega)$ (e quindi nella topologia $H^1(\Omega)$) in tutti i punti di $H^2_{loc}(\Omega)$. Infatti, se $u\in L^2(\Omega)$, H é finito e continuo in u; se $u\notin L^2(\Omega)$, $H(u,\Omega) = +\infty$ e per il lemma di Fatou H é semicontinuo inferiormente per la topologia L^2; segue quindi che H é continuo.

Siano G_h e G una successione e un funzionale in $\mathcal{G}$ e $A \in \mathcal{A}$, tali che

$$\Phi(u,\Omega) + G(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} [\Phi(v,\Omega) + G(u,A)]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Allora, per l'osservazione 5.2 e l'osservazione 1.7, segue che, se H é il funzionale definito dalla (5.1), allora

$$\Phi(u,\Omega) + G(u,A) + H(u,\Omega) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} [\Phi(u,\Omega) + G(u,A) + H(u,\Omega)] \tag{5.2}$$

Proposizione 5.3 Il problema

$$\min_{u \in H^2_{loc}(\Omega)} \left[\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A) + H(u,\Omega)\right] \tag{5.3}$$

per ogni $G \in \mathcal{G}$ e $A \in \mathcal{A}$ ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione Per ogni $\Omega' \in \mathcal{A}$ esiste una costante $K = K(\Omega,\Omega')$ tale che

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le K(\Omega,\Omega') \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{5.4}$$

(vedi per esempio [21], teorema 8.8)

Dalla (b) della definizione 5.1 e dalla (5.4) segue che esistono delle costanti $\alpha, \beta > 0$ tali che per ogni $\Omega' \in \mathcal{A}$

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A) + H(u,\Omega) \geq \alpha \|u\|_{H^2(\Omega')} - \beta \tag{5.5}$$

Segue che ogni successione minimizzante é debolmente compatta in $H^2_{loc}(\Omega)$ e, poiché $\Phi + G + H$ é un funzionale semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole in $H^2_{loc}(\Omega)$, il problema di minimo 5.3 ammette almeno una soluzione.

A questo punto siamo in grado di enunciare il teorema di convergenza dei minimi.

Teorema 5.4 Siano G_h e G una successione e un elemento di $\mathcal{G}$, sia $A \in \mathcal{Q}$ e sia H il funzionale definito dalla (5.1). Supponiamo che

(5.6) $$\Phi(u,\Omega) + G(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} \left[\Phi(v,\Omega) + G(v,A)\right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Allora la successione dei valori minimi dei problemi

(5.7) $$\min_{u \in H^2_{loc}(\Omega)} \left[\Phi(u,\Omega) + G_h(u,A) + H(u,\Omega)\right]$$

converge al valore minimo del problema

(5.8) $$\min_{u \in H^2_{loc}} \left[\Phi(u,\Omega) + G(u,A) + H(u,\Omega)\right]$$

Inoltre, se il problema (5.8) ammette un'unica soluzione e u_h é una successione di soluzioni dei problemi (5.7), allora u_h converge all'unico punto di minimo soluzione della (5.8).

Per la dimostrazione abbiamo bisogno dei seguenti lemmi :

Lemma 5.5 Nelle ipotesi del teorema si ha

$$\Phi(u,\Omega') + G(u,A) \leq \Gamma(H^1(\Omega')^-) \liminf_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} \left[\Phi(v,\Omega') + G_h(v,A)\right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $\Omega' \in \mathcal{A}$ con $\bar{A} \subseteq \Omega'$.

<u>Dimostrazione</u> Fissiamo $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, $\Omega' \in \mathcal{A}$ con $\Omega' \supseteq \bar{A}$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni successione v_h in $H^2_{loc}(\Omega)$, $v_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega')$, si ha :

$$\Phi(u,\Omega') + G(u,A) \leq \liminf_{h\to\infty} \left[\Phi(v_h,\Omega') + G_h(v_h,A)\right]$$

Con una costruzione analoga a quella utilizzata nella parte (b) del teorema 4.3, si ha che, fissata v_h in $H^2_{loc}(\Omega)$, con $v_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega')$, é possibile trovare una successione u_h in $H^2_{loc}(\Omega)$ che converge ad u in $H^1(\Omega')$, tale che $u_h - u$ $H^2_0(\Omega')$ per ogni h e per ogni $\varepsilon > 0$

$$(5.9) \qquad \liminf \left[\Phi(u_h,\Omega') + G_h(u_h,A)\right] \leq \liminf \left[\Phi(v_h,\Omega') + G_h(v_h,A)\right] + \varepsilon$$

Ponendo $u_h = u$ in $\Omega\setminus\Omega'$ per ogni h, si ha una successione u_h in $H^2_{loc}(\Omega)$ tale che $u_h \longrightarrow u$ in $H^1(\Omega)$ e per le ipotesi

$$(5.10) \qquad \Phi(u,\Omega) + G(u,A) \leq \liminf \left[\Phi(u_h,\Omega) + G_h(u_h,A)\right]$$

Sottrendo ad entrambi i lati della (5.10) $\Phi(u,\Omega\setminus\Omega')$, e tenendo conto del fatto che per ogni h $u_h = u$ su $\Omega\setminus\Omega'$, si ha

$$(5.11) \qquad \Phi(u,\Omega') + G(u,A) \leq \liminf \left[\Phi(u_h,\Omega') + G_h(u_h,A)\right]$$

Tenendo conto delle (5.11), (5.9) e dell'arbitrarietà di ε, si ottiene la tesi.

<u>Lemma</u> 5.6 Siano G_h,G ed A tali da verificare l'ipotesi (5.6) del teorema 5.4. Allora

$$\Phi(u,\Omega)+G(u,A)+H(u,\Omega) = \Gamma(H^1_{loc}(\Omega)^-)\lim_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v_h,A)+H(v,\Omega)\right]$$

per ogni u $H^2_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione Sia $u\in H^2_{loc}(\Omega)$. Per la proprietà (b) della definizione 5.1 per ogni $\Omega'\in\mathcal{A}$ si ha

$$\Phi(u,\Omega)+H(u,\Omega) \geq \Phi(u,\Omega')+H(u,\Omega')+\Phi(u,\Omega\setminus\Omega')+$$

$$+c\,\|u\|^2_{L^2(\Omega\setminus\Omega')} - \int_{\Omega\setminus\Omega'} a(x)\,dx$$

$$\geq \Phi(u,\Omega')+H(u,\Omega') - \int_{\Omega\setminus\Omega'} a(x)\,dx$$

Utilizzando il lemma 5.5, la (5.2) e tenendo conto dell'osservazione 1.5, segue quindi che, per ogni $\Omega'\in\mathcal{A}$ con $\Omega'\supseteq A$

$$\Phi(u,\Omega)+G(u,A)+H(u,\Omega) =$$

$$= \Gamma(H^1(\Omega)^-)\lim_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v,A)+H(u,\Omega)\right]$$

$$\geq \Gamma(H^1_{loc}(\Omega)^-)\limsup_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v,A)+H(v,\Omega)\right]$$

$$\geq \Gamma(H^1_{loc}(\Omega)^-)\liminf_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega)+G_h(v,A)+H(v,\Omega)\right]$$

$$\geq \Gamma(H^1(\Omega')^-)\liminf_{\substack{h\to\infty\\ v\to u}}\left[\Phi(v,\Omega')+G_h(v,A)+H(v,\Omega')\right] +$$

$$- \int_{\Omega\setminus\Omega'} a(x)\,dx \quad \geq$$

$$\geq \Phi(u,\Omega') + G(u,A) + H(u,\Omega') - \int_{\Omega\setminus\Omega'} a(x)\,dx$$

Nel limite per $\Omega' \nearrow \Omega$ si ottiene la tesi. ∎

Dimostrazione del teorema 5.4 Dalla proprietà (b) della definizione 5.1 e per la (5.4) esistono due costanti reali $\alpha, \beta > 0$ tali che, qualunque sia $\Omega' \in \mathcal{A}$ e $h \in \mathbb{N}$, si abbia

$$(5.12) \qquad \Phi(u,\Omega) + G_h(u,A) + H(u,\Omega) \geq \alpha \|u\|^2_{H^2(\Omega')} - \beta$$

Per il lemma 5.6 la successione $\Phi + G_h + H$ Γ-converge nella topologia $H^1_{loc}(\Omega)$ a $\Phi + G + H$, e per la (5.12) tutti i funzionali della successione assumono minimo in un compatto di $H^1_{loc}(\Omega)$. Le ipotesi del teorema 1.8 sono quindi soddisfatte e i valori minimi dei funzionali $\Phi + G_h + H$ convergono al minimo di $\Phi + G + H$.

Inoltre, se u_h é una soluzione del problema di minimo

$$\min_{u \in H^2_{loc}(\Omega)} \left[\Phi(u,\Omega) + G_h(u,A) + H(u,\Omega)\right]$$

allora, per la (5.12) e per il teorema 1.8, esiste una sottosuccessione u_{h_k} convergente in $H^1_{loc}(\Omega)$ ad una soluzione u_o del problema di minimo

$$\min_{u \in H^2_{loc}(\Omega)} \left[\Phi(u,\Omega) + G(u,A) + H(u,\Omega)\right)$$

Se il funzionale $\Phi + G + H$ ha un unico punto di minimo su $H^2_{loc}(\Omega)$, allora l'intera successione u_h converge in $H^1_{loc}(\Omega)$ a u_0.

Un teorema analogo al precedente si ha per la convergenza di soluzioni di problemi di minimo con condizioni al contorno di Dirichlet.

Sia K la migliore costante che verifichi la seguente disuguaglianza :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq K \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^2_0(\Omega) \tag{5.13}$$

(vedi per esempio [21], lemma 9.17)

Supporremo d'ora in poi che nell'ipotesi (b) della definizione 5.1 del funzionale H la condizione $c > 0$ sia sostituita da $c > -(1/K)$.

<u>Proposizione</u> 5.7 Siano $w \in H^2(\Omega)$, $G \in \mathcal{G}$ e $A \in \mathcal{A}$. Allora il problema di minimo

$$\min_{\substack{u \in H^2(\Omega) \\ u-w \in H^2_0(\Omega)}} \left[\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u,A) + H(u,\Omega) \right]$$

ammette sempre una soluzione.

<u>Dimostrazione</u> Dalla (5.13) segue che

$$\|u-w\|_{H^2(\Omega)} \leq K \|\Delta(u-w)\|_{L^2(\Omega)} \leq K \| |\Delta u| + |\Delta w| \|_{L^2(\Omega)}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$ con $u - w$ $H^2_0(\Omega)$.

Per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ si ha quindi

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq (1-\varepsilon)^{-1} \|u-w\|^2_{H^2(\Omega)} + \varepsilon^{-1} \|w\|^2_{H^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq (1-\varepsilon)^{-1} K \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\varepsilon)^{-1} \varepsilon^{-1} K \|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \varepsilon^{-1} \|w\|^2_{H^2(\Omega)}$$

E per la definizione 5.1 :

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u, A) + H(u, \Omega) \geq$$

$$\geq \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - c \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega a(x)\, dx$$

$$\geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{K} \|u\|^2_{H^2(\Omega)} - c \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1} \|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$- \frac{\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)^2}{K} \|w\|^2_{H^2(\Omega)} - \int_\Omega a(x)\, dx$$

Poiché $c > -(1/K)$,

scegliendo ε opportunamente piccolo, si ha che esistono due costanti reali

$\alpha', \beta' > 0$ tali che

(5.14) $$\int_\Omega |\Delta u|^2 + G(u, A) + H(u, \Omega) \geq \alpha' \|u\|^2_{H^2(\Omega)} - \beta'$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$ con $u - w$ $H^2_0(\Omega)$.

La (5.14) e la semicontinuità nella topologia debole di $H^2(\Omega)$ del funzionale $\Phi + G + H$, come nella dimostrazione della proposizione 5.3, garantiscono l'esistenza di un minimo. ∎

<u>Teorema</u> 5.8 Siano G_h e G una successione e un funzionale in $\mathcal{G}$, e siano $w \in H^2(\Omega)$ e $A \in \mathcal{A}$.

Supponiamo che

$$(5.15) \qquad \Phi(u,\Omega) + G(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} \left[\Phi(v,\Omega) + G_h(v,A)\right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Allora la successione dei valori minimi dei problemi

$$(5.16) \qquad \min_{\substack{u\in H^2(\Omega) \\ u-w\in H^2_0(\Omega)}} \left[\Phi(u,\Omega) + G_h(u,A) + H(u,\Omega)\right]$$

converge al valore minimo del problema

$$(5.17) \qquad \min_{\substack{u\in H^2(\Omega) \\ u-w\in H^2_0(\Omega)}} \left[\Phi(u,\Omega) + G(u,A) + H(u,\Omega)\right]$$

Inoltre, se il problema (5.17) ammette un'unica soluzione e u_h é una successione di soluzioni dei problemi (5.16), allora u_h converge all'unico punto di minimo soluzione della (5.17).

<u>Dimostrazione</u> Dall'ipotesi (5.15), dal teorema 4.3 e dall'osservazione 5.2 segue che, se F_h e F sono i funzionali da $H^2_{loc}(\Omega) \times \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definiti da

$$F_h(u,A) = \begin{cases} \Phi(u,\Omega) + G_h(u,A) & \text{se } u-w \in H^2_0(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F(u,A) = \begin{cases} \Phi(u,\Omega) + G(u,A) & \text{se } u-w \in H^2_0(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $A \in \mathcal{A}$, allora

(5.18) $$F(u,A) + H(u,A) = \Gamma(H^1(\Omega)^-) \lim \left[F_h(u,A) + H(u,A) \right]$$

per ogni $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 5.7 é possibile trovare due costanti $\alpha', \beta' > 0$ tali che qualunque sia $h \in \mathbb{N}$:

(5.19) $$\int_\Omega |\Delta u|^2 + G_h(u,A) + H(u,\Omega) \geq \alpha' \|u\|^2_{H^2(\Omega)} - \beta'$$

per ogni $u \in H^2(\Omega)$ con $u - w$ $H^2_0(\Omega)$.

Quindi i funzionali $F_h + H$ assumono il minimo in un compatto di $H^1(\Omega)$ e per la (5.18) Γ-convergono nella topologia di $H^p(\Omega)$ a $F + H$.

Basta dunque applicare il teorema 1.8 per ottenere la tesi. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] H. ATTOUCH. Convergence des solutions d'inequations variationelles avec obstacle. In Proceedings of the International Meeting on "Recent Methods in Non Linear Analysis", Rome, 1978, ed. by E. De Giorgi, U. Mosco, Pitagora editrice, Bologna (1979), 101,111.

[2] H. ATTOUCH. Variational convergence for functions and operators. Pitman, London (1984).

[3] H. ATTOUCH & C. PICARD. Problèmes variationnels et théorie du potentiel non linéaire. Ann. Fac. Sci. Toulouse 1 (1979), 89,136.

[4] H. ATTOUCH & C. PICARD. Inequations variationnelles avec obstacles et espaces fonctionnels en théorie du potentiel. Applicable Anal. 12 (1981), 287, 306.

[5] H. ATTOUCH & C. PICARD. Variational inequalities with varying obstacles. The general form of the limit problem. J. of Funct. Anal. 50 (1983), 329,386.

[6] L. BOCCARDO & I. CAPUZZO DOLCETTA. G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale. Boll. U.M.I. (4) 12 (1975), 115,123.

[7] L. BOCCARDO & P. MARCELLINI. Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110 (1976), 137,159.

[8] L. BOCCARDO & F. MURAT. Nouveaux résultats de convergence dans des problèmes unilatéraux. In Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Volume II, ed. by H. Brezis, J.L. Lions, Research Notes in Mathematics, Pitman, London (1982), 64,85.

[9] L. CARBONE & F. COLOMBINI. On convergence of functionals with unilateral constraints. J. Math. Pures Appl. (9) 59 (1980), 465,500.

[10] L. CARBONE & C. SBORDONE. Some properties of -limits of integral functionals. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 122 (1979), 1,60.

[11] D. CIORANESCU. Calcul des variations sur des sous-espaces variables. C. R. Acad. Sci. Paris A 291 (1980), 19,22 - 87,90.

[12] D. CIORANESCU & F. MURAT. Un terme étrange venu d'ailleurs I e II. In Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar, Volume II e III, ed. by H. Brezis, J.L. Lions, Research Notes in Mathematics 60 (1982) 98,138 and 70 (1983), 154,178.

[13] D. CIORANESCU & J. SAINT JEAN PAULIN. Homogeneizations in open sets with holes. J. Math. Pures Appl. 71 (1979), 590,607.

[14] G. DAL MASO. Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles. Ann. Mat. Pura Appl. 129 (1981), 327,366.

[15] G. DAL MASO. Limiti di problemi di minimo con ostacoli. In Atti del Convegno su "Studio dei problemi-limite in Analisi Funzionale, Bressanone, 7-9

Settembre 1981, Pitagora, Bologna (1982), 79,100.

[16] G. DAL MASO. On the integral representation of certain local functionals. Ricerche di Matematica 32 (1983), 85,113.

[17] G. DAL MASO & P. LONGO. -limits of obstacles. Ann. Mat. Pura Appl. 128 (1981), 1,50.

[18] G. DAL MASO & L. MODICA. A general theory of variational functionals. Topics in Functional Analysis, Scuola Norm. Sup. Pisa (1980-1981).

[19] E. DE GIORGI, G. DAL MASO & P. LONGO. -limiti di ostacoli. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 68 (1980), 481,487.

[20] E. DE GIORGI & T. FRANZONI. Su un tipo di convergenza variazionale. Rendiconti del Seminario Matematico di Brescia, 3 (1979), 63,101.

[21] D. GILBARG & N.S. TRUDINGER. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Second Edition, Springer Verlag, Berlin 1983.

[22] E.YA. HRUSLOV. The method of orthogonal projections and the Dirichlet problem in domains with a fine grained boundary. Math. U.S.S.R. Sb. 17 (1972) 37,59.

[23] E. YA. HRUSLOV. The first boundary value problem in domains with a complicated boundary for higher order equations. Math. U.S.S.R. Sb. 32 (1977),535 549.

[24] M. KAC. Probabilistic methods in some problems of scattering theory. Rocky

Mountain J. Math. 4 (1974), 511,538.

[25] P. MARCELLINI. Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse. Boll. U.M.I. (4) 11 (1975), 107,124.

[26] P. MARCELLINI & C. SBORDONE. Sur quelques questions de G-convergence et de homogéneisation non linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris 1er A 284 (1977), 535, 537.

[27] A.V. MARCHENKO & E. YA. HRUSLOV. Boundary value problems in domains with close-grained boundaries. (In Russian). Naukova Dumka, Kiev (1974).

[28] N.G. MAYERS. Atheory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes. Math. Scand. 26 (1970), 255,292.

[29] V.G. MAZ'JA & V.P. HAVIN. Nonlinear potential theory. Russian Math. Survey 27 (1972), 71,148.

[30] U. MOSCO. Convergence of convex sets and solutions of variational inequali ties. Advances in Math. 3 (1969), 510,585.

[31] G.C. PAPANICOLAOU & S.R.S. VARADHAN. Diffusion in regions with many small holes. In Stochastic Differential Systems Filtering and Control. Proceedings of the IFIP - WG 7/1 Working Conference, Vilnius, Lithuania, U.S.S.R. Aug. 27 Sept. 2, 1978, ed. by B. Grigelionis, Lecture Notes in Control and Informa tion Sciences 25 Springer (1980), 190,206.

[32] C. PICARD. Comportement limite de suites d'inequations variationnelles avec

obstacles. Thèse Orsay, Université Paris Sud (1984).

[33] J. RAUCH & M. TAYLOR. Potential and scattering theory on wildly perturbated domains. J. Funct. Anal. 18 (1975), 27,59.