ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL
FOR ADVANCED STUDIES

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

OPERATORI DISCONIUGATI ED ESTENSIONE DELLA TEORIA DI STURM

Candidato:

Dott. Marcellino GAUDENZI

Relatore:

Prof. G. VIDOSSICH

Anno Accademico 1982/1983

TRIESTE

SISSA - SCUOLA
INTERNAZIONALE
SUPERIORE
DI STUDI AVANZATI
TRIESTE
Strada Costiera 11

SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI

TRIESTE

Tesi di Master

OPERATORI DISCONIUGATI ED ESTENSIONE DELLA TEORIA DI STURM.

Settore: Analisi Funzionale e Applicazioni

Relatore: Prof. G. Vidossich

Candidato: Marcellino Gaudenzi

Anno Accademico 1982 - 1983

I N D I C E

INTRODUZIONE pag. 1

1. DEFINIZIONI E NOTAZIONI PRELIMINARI pag. 3

2. PUNTI CONIUGATI $\eta_k(a)$ E SOLUZIONI ESTREMALI pag. 6

3. PUNTI ESTREMALI $\vartheta_i(a)$ E SOLUZIONI ESTREMALI PER $[a, \vartheta_i(a)]$ pag. 16

4. PROBLEMI DI AUTOVALORI ED ESTENSIONE DEL TEOREMA DI CONFRONTO DI STURM pag. 28

BIBLIOGRAFIA pag. 42

INTRODUZIONE.

Fin dai tempi di Polya, è nata la questione di generalizzare ad equazioni di ordine n:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

la teoria di Sturm-Liouville valida per quelle del 2° ordine. Uno degli strumenti che si sono rivelati più utili è la fattorizzazione dell'equazione suddetta in un prodotto di operatori del 1° ordine:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = r_{n+1}(x)Dr_nD\dots r_2Dr_1y \;,$$

dove $r_i(x) > 0$ per $1 \leqslant i \leqslant n+1$ e $D=d/dx$. Tale fattorizzazione è possibile, in virtù di un noto teorema di Polya, se e solo se ogni soluzione non-banale dell'equazione:

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

possiede meno di n zeri, nel qual caso si dice che l'operatore differenziale L è <u>disconiugato</u>.

Recentemente c'è stato un rinnovato interesse per questa questione ad opera di numerosi lavori di Elias e Ahmad-Lazer. Lo scopo di questa tesi è di fare il punto sui contributi più recenti.

Esamineremo dapprima le proprietà dei punti coniugati e delle soluzioni estremali dell'equazione che costituisce l'oggetto principale dei lavori considerati:

$$(*) \qquad Ly + p(x)y = 0 \;;$$

dove L è un operatore lineare disconiugato e p(x) è una funzione continua di segno costante (Elias [6] estende i risultati di Johnson [16] e Nehari [26]).

Successivamente ci interesseremo dei risultati ottenuti da Elias [10] per il problema di multipunti relativo all'equazione (*) con n condizioni al contorno imposte agli estremi dell'intervallo considerato e di quanto ottenuto indipendentemente da Ahmad e Lazer [1] in un caso più particolare di condizioni al contorno ma con ipotesi meno restrittive sulla $p(x)$.

Particolare attenzione verrà dedicata al problema di autovalori:

$$Ly + \lambda p(x) y = 0 \ ,$$

con y soddisfacente opportune condizioni al contorno.
Nell'ipotesi che L sia disconiugato, Krein ([18] , [19]) prova la esistenza di autovalori per questo problema e dimostra alcune proprietà degli zeri delle autofunzioni, applicando la teoria dei nuclei oscillanti dovuta a Kellogg ([34] , [35]), nel caso simmetrico, e a Gantmacher [33] , nel caso non-simmetrico.
Elias [9] ripropone ed estende questi risultati considerando condizioni al contorno più generali; inoltre egli utilizza per le dimostrazioni solo i metodi delle equazioni differenziali lineari e degli operatori disconiugati.

Quanto sviluppato da Elias permette ad Ahmad e Lazer [2] di dare un'importante estensione all'equazione (*) del noto teorema di confronto di Sturm; l'esposizione di questo risultato conclude la tesi.

1. DEFINIZIONI E NOTAZIONI PRELIMINARI.

Un operatore lineare differenziale di ordine n:

$$L(y) = y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+ \dots +p_n(x)y \qquad p_i \in C \quad 1\leq i\leq n,$$

è detto disconiugato su un intervallo I, se ogni soluzione non banale di $L(y)=0$ ha meno di n zeri su I (gli zeri multipli vanno contati considerando la loro molteplicità).

Nel seguito verrà sempre supposto che $p_i(x) \in C(I)$, $i=1, \dots ,n$.

Se I è un intervallo compatto o aperto allora un operatore disconiugato è fattorizzabile su I in un prodotto di operatori del primo ordine (cfr. Polya [27] e Coppel [5]):

(1) $$L(y)=r_{n+1}Dr_nD\dots r_2Dr_1y ,$$

dove $r_k(x)>0$ su I e $D=d/dx$.

Sia y una soluzione dell'equazione $Ly=0$, e sia $L_oy=r_1y$, $L_ty=r_{t+1}d/dxL_{t-1}y$, $L_oy, L_1y, \dots ,L_{n-1}y$ vengono dette le quasi-derivate di y.

L'equazione da noi presa in considerazione è:

(2) $$L(y)\mp p(x)y=0$$

dove $L(y)$ è un operatore lineare disconiugato su $[0,+\infty)$ e $p(x)$ è una funzione continua e di segno costante su $[0,+\infty)$.

Quando esiste almeno una soluzione non-banale dell'equazione (2) tale che $y(a)=0$ e y possiede almeno n+k-1 zeri in $[a,+\infty)$, si definisce il <u>k-esimo punto coniugato</u> di a, $\eta_k(a)$, come l'estremo inferiore dei punti $x\in(a,+\infty)$ tali che esiste una soluzione non-banale dell'equzione (2) con almeno n+k-1 zeri in $[a,x]$ e che si annulla in a.

E' banale verificare che, quando esiste, $\eta_k(a)>a$ ed esiste y soluzione di (2) con almeno n+k-1 zeri in $[a,\eta_k(a)]$ e $y(a)=y(\eta_k(a)) = 0$.

Una tale funzione y verrà detta soluzione estremale per $[a,\eta_k(a)]$.

Consideriamo il seguente sistema di condizioni al contorno per l'intervallo $[a,s]$:

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} L_i y(a) = 0 & i \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ L_j y(s) = 0 & j \in \{j_1, \dots, j_{n-k}\} \end{array}$$

L'<u>i-esimo punto estremale</u> $\vartheta_i(a)$, corrispondente al sistema (3) è l'i-esimo valore di s in $(a,+\infty)$ per il quale esiste una soluzione non-banale dell'equazione (2) verificante il sisitema (3).

La corrispondente soluzione è detta soluzione estremale per $[a, \vartheta_i a]$.

Un importante particolare sistema del tipo (3) è il seguente:

$$\begin{array}{ll} L_i y(a) = 0 & , \quad i=0, \dots, k-1 \\ L_j y(s) = 0 & , \quad j=0, \dots, n-k-1 \end{array}$$

che è equivalente a :

$$(4)\qquad \begin{array}{ll} y^{(i)}(a) = 0 & , \quad i=0, \dots, k-1 \\ y^{(j)}(s) = 0 & , \quad j=0, \dots, n-k-1 \end{array}$$

Sia y una soluzione dell'equazione (2), le n quasi-derivate verranno considerate in un ordine ciclico cosicchè $L_o y$ segue $L_{n-1}y$. Siano $x_1 \leqslant \dots \leqslant x_r$ gli zeri di $L_o y, \dots, L_{n-1}y$ in un intervallo $[a,b]$ in modo che zero comuni di quasi-derivate consecutive verranno considerate come zeri multipli, ma indici distinti verranno usati per gli zeri di derivate non-consecutive nello stesso punto. Indichiamo con:

$n(x_i,y)$ il numero di quasi-derivate consecutive che si annulla in x_i;

$\nu(x_i,y)$ il numero totale di quasi-derivate di y(x) che si annulla in x_i,

cioè $\nu(x_i,y) = \sum_{x_i=c} n(x_i,y)$;

$m(x_i,y)$ la molteplicità dello zero x_i.

Quando il riferimento alla soluzione y(x) è ovvio,scriveremo semplicemente: $m(x_i), n(x_i), \nu(x_i)$.

Supponiamo ora che p(x) non si annulla in un sottointervallo di $[0,\infty)$ e sia $E=\{x\in[0,\infty) \mid p(x)\neq 0\}$. Denotiamo con $S(c_0,\dots,c_n)$ il numero dei cambiamenti di segno nella successione $c_0,\dots,c_n$, i cui elementi sono numeri reali diversi da zero. Indichiamo con:

$$(5)\qquad \begin{array}{l} S(y,a+)=\lim\limits_{x\to a^+} S(L_0y(x),-L_1y(x),\dots,(-1)^n L_ny(x)) \ , \ x\in[0,\infty)-E \\ S(y,a-)=\lim\limits_{x\to a^-} S(L_0y(x),L_1y(x),\dots,L_ny(x)) \ , \ x\in[0,\infty)-E . \end{array}$$

$L_o y, L_1 y, \dots, L_{n-1} y$ hanno solo un numero finito di zeri in un intervallo $[a,b]$ quindi i limiti in (5) esistono, inoltre si ha che $\mathrm{sgn}[L_i y(x-\varepsilon)]$ e $\mathrm{sgn}[L_i y(x+\varepsilon)]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, sono definiti per ε sufficientemente piccolo. $L_n y(x)$ risulta di segno costante in $(x-\varepsilon, x)$ e $(x+\varepsilon, x)$, in questo caso con: $\mathrm{sgn}[L_n y(x-\varepsilon)]$ e $\mathrm{sgn}[L_n y(x+\varepsilon)]$ intenderemo rispettivamente il segno di $L_n y(x)$ in $(x-\varepsilon, x)-E$, $(x+\varepsilon, x)-E$.

Sia f continua in $[a,b]$. Un intervallo massimale chiuso contenuto in $[a,b]$ su cui f risulta identicamente nulla verrà detto un zero componente di f (l'intervallo può consistere anche di un singolo punto). Noi diciamo che f cambia segno h volte in un sottointervallo di $[a,b]$, se esistono h+1 punti $x_1, \dots, x_{h+1}$ appartenenti a questo intervallo tali che $f(x_j)f(x_{j+1}) < 0$ per $j=1, \dots, h$. Diciamo che f cambia segno in un intervallo se f cambia segno almeno una volta in questo intervallo.

Osserviamo che non sempre nella letteratura vengono usate le stesse notazioni per i punti estremali e i punti coniugati, Ahmad e Laser [1] ad esempio, denotano l'i-esimo punto estremale corrispondente al sistema (4) con ζ_i^k, qui abbiamo usato le notazioni di Elias [6], [7], [9], [10].

2. PUNTI CONIUGATI $\eta_k(a)$ E SOLUZIONI ESTREMALI.

Se una equazione differenziale lineare di ordine n, a coefficienti continui, ammette una soluzione non-banale con almeno n zeri in un intervallo $[a,b]$, ha senso considerare l'estremo inferiore dei punti $x > a$, tali che l'equazione considerata è disconiugata in $[a,x]$, è noto (cfr. Levin [21] e Coppel [5]) che tale punto s risulta maggiore di a e che esiste una soluzione non-banale dell'equazione che possiede k zeri in a e n - k zeri in s ($1 \leqslant k \leqslant n - 1$) e che non si annulla in (a,s). Il punto s coincide con il primo punto coniugato di a, $\eta_1(a)$, definito precedentemente.

Per alcuni tipi di equazioni differenziali lineari è possibile ottenere considerazioni analoghe per un generico punto coniugato $\eta_k(a)$, nonchè stabilire la distribuzione degli zeri delle soluzioni estremali per $[a, \eta_k(a)]$ e le proprietà della funzione $\eta_k(.)$. Ciò è ststo fatto da Leighton e Nehari [20] per l'equazione:

$$(ry'')'' + p(x)y = 0$$

e da Hunt [15] per l'equazione:

$$(ry^{(n)})^{(n)} + p(x) = 0$$

Il caso dell'equazione (2), da noi presa in considerazione, viene studiato da Johnson [16] con l'ipotesi che l'operatore L ha ordine pari e $p(x) < 0$, mentre Elias [6] studia il caso generale; in ambedue questi lavori vengono utilizzati i risultati di Nehari [26] per l'equazione (2).

I principali risultati ottenuti da questi autori possono essere riassunti nei seguenti teoremi:

<u>TEOREMA 1.</u> Sia $y(x)$ una soluzione estremale dell'equazione (2) per $[a, \eta_k(a)]$. Allora $y(x)$ ha esattamente n+k-1 zeri in $[a, \eta_k(a)]$

ed esattamente k-1 zeri distinti di moltepmicità dispari in $(a, \eta_k(a))$. Lo zero $\eta_k(a)$ è di molteplicità dispari [pari] se $p(x) \geq 0$ [$p(x) \leq 0$]. Se $p(x) \leq 0$, allora $y(x)$, $L_1 y(x)$, ... , $L_{n-1} y(x)$ non hanno zeri in $(\eta_k(a), +\infty)$ e se $(-1)^n p(x) \leq 0$, un'analoga conclusione vale in $[0,a)$.

<u>TEOREMA 2.</u> $\eta_k(.)$ è una funzione continua strettamente crescente che è defintita in un intervallo della forma $[0,b)$, $0 \leq b \leq \infty$.

Il principale strumento per la dimostrazione dei teormi precedenti è costituito dallo studio della funzione $M(y)$ introdotta da Johnson [16] .

DEFINIZIONE. Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione (2) che possiede nei punti $a = x_1 < x_2 < \dots < x_r = b$ zeri di molteplicità $m(x_1)$, ... , $m(x_r)$ rispettivamente. Per la soluzione y in $[a,b]$ definiamo:

$$I = \{ i \mid m(x_i) \text{ è pari oppure } x_i = a \text{ o } x_i = b \}$$

$$J = \{ j \mid m(x_j) \text{ è dispari e } a < x_j < b \}$$

$$M(y) = \sum_{i \in I} m(x_i) + \sum_{j \in J} (m(x_j) - 1)$$

<u>LEMMA 1.</u> Ogni soluzione y dell'equaziom̶e̶ (2) soddisfa $M(y) \leq n$. Inoltre nel caso $M(y) = n$ si ha:

a) gli zeri di $L_t y$ $(t = 1, \dots, n-1)$ possono essere solamente o in punti dove $y(x)$ ha uno zero di molteplicità maggiore di t oppure tra due zeri consecutivi di L_{t-1} (e in questo caso sono zeri semplici).

b) $m(b)$ e $n-m(a)$ sono dispari (pari) quando $p(x) \geq 0$ $(p(x) \leq 0)$.

DIMOSTRAZIONE. Si assuma che $y(x)$ ha nei punti $a = x_1 < \dots < x_r = b$ di molteplicità $m(x_1)$, ... , $m(x_r)$. Se denotiamo con s_i il numero degli zeri di $y(x)$ con molteplicità maggiore o uguale a i, si avrà che $s = \sum s_i$ è il numero totale degli zeri di y in $[a,b]$ contando le molteplicità. Essendo la funzione $r_1(x)$ che risulta dalla fattorizzazione (1) maggiore di zero in $[a,b]$, $L_0 y = r_1 y$ si annulla in s_1 differenti punti di $[a,b]$. $L_1 y$ per il teorma di Rolle si annulla in almeno $s_1 - 1$ punti tra gli s_i punti dove si annulla $L_0 y$. Dunque $L_1 y$ si annulla in almeno $s_1 + s_2 - 1$ differenti punti di $[a,b]$. Analogamente $L_{n-2} y$ si annulla in almeno $s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} - (n-2)$ differenti punti di $[a,b]$. Ancora per il teorema di Rolle $L_{n-1} y$ cambia il suo segno almeno $s-(n-1)$ volte in (a,b) e quindi Ly cambia il suo segno almeno $s-n$ volte.

Essendo $p(x)$ di segno costante e poichè y cambia di segno solo nei punti x_j con $j \in J$, segue che $M(y) \leqslant n$.

Supponiamo ora che $M(y) = n$.

Da quanto visto in precedenza, $M(y) = n$ se e solo se $L_t y$ $(t=0, \ldots ,n-1)$ si annulla esattamrnte in $s_1 + \ldots + s_{t+1} - t$ differenti punti (si osservi che $s_n = 0$). Tra questi punti ci sono esattamente s_{t+1} punti dove $y(x)$ ha uno zero di molteplicità maggiore di t ed esattamente $s_1 + \ldots + s_t - t$ zeri che per il teorema di Rolle sono collocati tra gli $s_1 + \ldots + s_t - (t-1)$ punti dove $L_{t-1} y$ si annulla. Per provare l'affermazione a) resta quindi da verificare che gli zeri ottenuti tramite il teorema di Rolle sono semplici. Ma se $L_{t-1} y$ ha in uno di questi punti uno zero di molteplicità maggiore di 1, $L_{t+1} y$ possiede uno zero distinto dagli $s_1 + s_2 + \ldots + s_{t+2} - (t+1)$ che gli competono e ciò è impossibile.

Verifichiamo l'affermazione b) .

Per ipotesi si ha :

$$L_0 y(b) = \ldots = L_{m(b)-1} y(b) = 0.$$

Denotiamo con b_t l'ultimo zero di $L_t y$ $(m(b) \leqslant t \leqslant n-1)$ in $[a,b]$. In virtù della a) abbiamo:

$$b_{n-1} \leqslant b_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant b_{m(b)} < b \quad \text{ed inoltre:}$$

$$L_{m(b)} y(b) \neq 0, \ldots , L_{n-1} y(b) \neq 0 \; . \tag{6}$$

Sia b_n l'ultimo punto in cui Ly cambia di segno, risulta $b_n < b_{n-1}$ e quindi $p(x)y(x)$ ha segno costante in $[b_n, b]$.

Consideriamo il caso in cui $p(x) \leqslant 0$. Senza perdere di generalità possiamo assumere $y(x) > 0$ a sinistra di b, cioè $(-1)^n L_{m(b)}y(b) \geq 0$. Integrando $r_{n+1}(x)D(L_{n-1}y)(x) = -p(x)y(x)$ su (b_{n-1},b), otteniamo :

$$(7) \qquad L_{n-1}y(b) = L_{n-1}y \Big|_{b_{n-1}}^{b} = \int_{b_{n-1}}^{b} -\frac{p(x)y(x)}{r_{n+1}(x)}\,dx > 0.$$

(Osserviamo che se $p(x)$ è nulla su un intervallo $[a,c]$, $c>a$, risulta $b_{n-1} < c$, e quindi la (7) è ancora valida. Dunque $L_{n-1}y(x) > 0$ in $(b_{n-1},b]$ e specialmente in $(b_{n-2},b]$. Integrando $r_n(x)D(L_{n-2}y)(x) = =L_{n-1}y(x)$ su (b_{n-2},b) otteniamo $L_{n-2}y(x) > 0$ su $(b_{n-2},b]$. In modo analogo otteniamo $L_{m(b)}y(b) > 0$, da cui deduciamo che m(b) è pari.
Essendo $m(a) + m(b) \equiv M(y) \equiv n \pmod{2}$, segue che anche $n-m(a)$ è pari.
Analoga è la dimostrazione nel caso $p(x) \geq 0$.

Osserviamo che Johnson [16] nell'introdurre la funzione M(y), non discrimina i punti a e b dagli altri zeri della y(x) in $[a,b]$, ma poichè egli suppone n pari e $p(x) < 0$, in virtù della b) del Lemma 1, quando $M(y)=n$, questa definizione non é che un caso particolare di quella qui riportata (Elias [6]).

Dal Lemma 1. seguono facilmente i seguenti corollari:

<u>COROLLARIO 1.</u> Ogni soluzione oscillatoria dell'equazione (2) ha un numero finito di zeri multipli e un numero infinito di zeri semplici.

<u>COROLLARIO 2.</u> Sia y(x) una soluzione dell'equazione (2) tale che $M(y)=n$. Allora se $p(x) \leq 0$, nessuna delle funzioni $L_0y, L_1y, \ldots, L_{n-1}y$ si annulla in (b, ∞) e tutte hanno lo stesso segno.

<u>COROLLARIO 3.</u> La somma delle molteplicità degli zeri di una soluzione dell'equazione (2) in s punti non supera $n+s-2$.

La parte b) del Lemma 1) e il Corollario 3. sono dovuti, nella forma qui esposta, ad Elias [6] ; Nehari [26] aveva in precedenza dimostrato, utilizzando un metodo per i Wroskiani dovuto a Mikusinski

[31], la parte b) del Lemma 1. nel caso in cui $y(x)$ ha k zeri in a e n-k zeri in b e il Corollario 3. nel caso $s=2$.

LEMMA 2. Se $y(x)$ è una soluzione estremale per $[a, \eta_k(a)]$, allora $M(y)=n$.

DIMOSTRAZIONE. Proveremo che se y è una soluzione di (2) in $[a,b]$ tale che $M(y) < n$, esiste un'altra soluzione con lostesso numero di zeri di y in $[a,b]$, cosicchè y non può essere unasoluzione estremale. $y(x)$ ha nei punti $a=x_1 < x_2 < \dots < x_r=b$ zeri di molteplicità $m(x_1)$, $m(x_2),\dots,m(x_r)$ tali che $M(y) < n$.
Sipponiamo per ora che $p(x) \geqslant 0$. Si considerino le seguenti $M(y)$ condizioni al contorno:

$$\begin{array}{lll}
u^{(t)}(x_i)=0 & 0 \leqslant t \leqslant m(x_i)-1, & i \in I \quad x_i \neq b \\
u^{(t)}(x_j)=0 & 0 \leqslant t \leqslant m(x_j)-2, & j \in J \\
u^{(t)}(b)=0 & 0 \leqslant t \leqslant m(b)-2 & \\
u^{(m(b)-1)}(b)=1 & &
\end{array}$$

e aggiungiamo $n-M(y) \geqslant 1$ condizioni:
se $n-m(a)$ é pari, aggiungiamo $n-M(y)$ condizioni in b:

$$u^{(t)}(b)=0 \quad m(b) \leqslant t \leqslant m(b)+n-M(y)-1 \ ;$$

se $n-m(a)$ è dispari, aggiungiamo $n-M(y)-1$ condizioni a b ed una ad a:

$$u^{(t)}(b)=0 \quad m(b) \leqslant t \leqslant m(b)+n-M(y)-2 \ ; \quad u^{m(a)}(a)=0$$

Il sistema non-omogeneo preso in considerazione ha un'unica soluzione in quanto il corrispondente sistema omogeneo ha solo la soluzione nulla in virtù del Lemma 1. Denotiamo questa soluzione con y^*, essa ha in b uno zero di molteplicità $m(b,y)-1$ e quindi è linearmente indipendente rispetto ad y. Per ogni ß, $y_1(x)=y(x)+ßy^*(x)$ ha in x_i ($i \in I$, $x_i \neq b$) uno zero di molteplicità $m(x_i)$, in x_j ($j \in J$) uno zero di molteplicità $m(x_j)-1$, e in b uno zero di molteplicità uguale esattamente a $m(b)-1$.
Per il noto teorema di L'Hôpital esiste un'intorno di x_j in cui $y(x)/y^*(x)$

è definita, derivabile e si annulla eventualmente solo in x_j. Se $y(x_j)/y^*(x_j)\neq 0$ allora la molteplicità di y^* in x_j è uguale a $m(x_j)$ e quindi y_1 ha uno zero addizionale in x_j; se $y(x_j)/y^*(x_j)=0$, la funzione y/y^* allora ha in x_j uno zero di ordine 1 e quindi cambia di segno in questo punto, quindi per ß sufficientemente piccolo, $y_1(x)=$ $=y^*(x)(y(x)/y^*(x)+ß)$ ha uno zero addizionale in un dato intorno di x_j. Analogamente per ß sufficientemente piccolo y_1 avrà uno zero addizionale in prossimità di b che può essere preso (sciegliendo il segno di ß) a destra di b. Questi zeri sono semplici, infatti, altrimenti $y(x)=\lim_{ß\to 0} y_1(x)$ verrebbe ad avere in x_j uno zero di molteplicità maggiore di $m(x_j)$. $y_1(x)$ ha in $[a,b]$ lo stesso numero di zeri di $y(x)$ e $M(y_1)<M(y)$.

Ripetendo un simile procedimento m(b) volte, noi spostiamo gli zeri in b uno ad uno a sinistra e otteniamo una soluzione che ha in $[a,b)$ lo stesso numero di zeri di $y(x)$ in $[a,b]$.

Quando $p(x)\leqslant 0$ la prova è simile.

I Lemma 1, e 2 ci permettono di dimostrare completamente il Teorema 1.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

Si supponga per assurdo che una soluzione estremale $y(x)$ ha almeno n+k zeri in $[a,\eta_k(a)]$. Lo zero di $y(x)$ in $\eta_k(a)$ non è semplice altrimenti $y(x)$ ha n+k-1 zeri in $[a,\eta_k(a))$. Consideriamo le seguenti $M(y)-2=n-2$ condizioni al contorno:

$$u^{(t)}(x_i)=0 \qquad 0\leqslant t\leqslant m(x_i)-1 \quad i\in I \qquad x_i\neq \eta(a)$$
$$u^{(t)}(\eta_k(a))=0 \qquad 0\leqslant t\leqslant m(\eta_k(a))-3$$
$$u^{(t)}(x_j)=0 \qquad 0\leqslant t\leqslant m(x_j)-2\ , \quad j\in J.$$

Il problema ha una soluzione non-banale $y^*(x)$ linearmente indipendente di $y(x)$. Assumiamo che $y^{*m(\eta_k(a))-2}\neq 0$. Come già visto nel Lemma 2., tramite considerazioni sulla funzione y/y^* è possibile verificare che $y_1(x)=y(x)+ßy^*(x)$, per ß sufficientemente piccolo e di segno opportuno, ha uno zero semplice vicino ogni x_j e a sinistra di b. Dunque $y_1(x)$ ha $n+k-1$ zeri in $[a, \eta_k(a)]$ mentre $M(y_1) = n-2$, in contrasto con il Lemma 2.

Ancora per il Lemma 2 y^* non può avere in $\eta_k(a)$ uno zero di molteplicità uguale a $m(\eta_k(a))-1$, mentre per il Lemma 1 tale molteplicità non può essere maggiore o uguale a $m(\eta_k(a))$. Abbiamo così provato che $y(x)$ ha esattamente $n+k-1$ zeri in $[a, \eta_k(a)]$ e da ciò segue facilmente che $y(x)$ ha esattamente $k-1$ zeri di molteplicità dispari.

Si supponga ora che esiste x_s, $a < x_s < b$ con $m(y,x_s) \geq 2$ e $m(y,x_s)$ pari. Procedendo analogamente ai casi precedenti è possibile trovare: una funzione y^*, linearmente indipendente di y,avente gli stessi zeri di y tranne nel punto x_s (dove $m(y^*,x_s)=m(y,x_s)-2$) e un numero ß, tali che per $y_1=y+ßy^*$ risulta $M(y_1)= n-2$ e y_1 ha $n+k-1$ zeri in $a, \;_k(a)$ in contrasto col Lemma 2.

Le ultime due affermazioni contenute nel Teorema 1 seguono rispettivamente dal Lemma 1 e dal Corollario 2.

<u>LEMMA 3.</u> Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una soluzione dell'equazione (2) avente $n + k - 1$ zeri semplici in $[a, \eta_k(a)+\varepsilon)$, inoltre se $a > 0$,ed $\varepsilon \leq a$ esiste una soluzione con $n+k-1$ zeri semplici in $(a-\varepsilon, \eta_k(a)]$.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo la prima asserzione, in modo simile si può dimostrare la seconda. Sia $\eta_k(a)+\varepsilon < \eta_{k+1}$, ovviamente ciò non è restrittivo. Si consideri una soluzione estremale $y(x)$ per $[a, \eta_k(a)]$. Se $m(\eta_k(a)) \geq 2$, esiste una soluzione y^* linearmente indipendente con y che soddisfa le seguenti n-2 condizioni:

$$
\begin{array}{lll}
u^{(t)}(x_i)=0 & 0 \leq t \leq m(x_i)-1 & i \in I \quad x_i \neq \eta(a) \\
u^{(t)}(\eta_k(a))=0 & 0 \leq t \leq m(\eta_k(a)) - 3 & \\
u^{(t)}(x_j)=0 & 0 \leq t \leq m(x_j)-2 \,. &
\end{array}
$$

Come già osservato nel caso della dimostrazione del Lemma 3 è possibile verificare che y^* non può avere in $\eta_k(a)$ uno zero di molteplicità maggiore di $m(\eta_k(a))-2$, quindi è possibile trovare un numero ß tale che

$y_1(x)=y(x)+\beta y^*(x)$ ha almeno n+k-1 zeri in $[a, \eta_k(a)+\varepsilon)$; essendo $\eta_k+\varepsilon<\eta_{k+1}$, $y_1(x)$ in tale intervallo h a esattamente n+k-1 zeri, inoltre gli zeri semplici di $y_1(x)$ sono maggiori di quelli di y, ripetendo un simile procedimento un numero finito di volte si otterrà una soluzione y di (2) con n+k-1 zeri semplici in $[a, \eta_k(a)+\varepsilon)$.
Quando $m(\eta_k(a))=1$ si comincia la dimostrazione togliendo zeri dall'ultimo zero multiplo a sinistra di $\eta_k(a)$.

TEOREMA 3. Se una soluzione dell'equazione (2) ha m ($m\geq n$) zeri (contandone la molteplicità) in un intervallo I aperto o semiaperto, allora esiste una soluzione dell'equazione (1) con m zeri semplici in I.

DIMOSTRAZIONE. Se y(x) ha m zeri in $I=[a,b)$ allora essendo $\eta_k(a)<b$ con k=m+1-n, per il Lemma 3 si ha la tesi. La dimostrazione è ancora conseguenza del Lemma 3 per gli intervalli $(a,b]$, (a,b) infatti detto c il primo zero di y in I risulta $c>a$ e $\eta_k(c)\leq b$ con k=m+1-n.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.

Dal Lemma 3 segue che se $\eta_k(a)$ esiste, c'è una soluzione y(x) di (2) con n+k-1 zeri semplici in $[a, \eta_k(a)+\varepsilon)$, il primo dei quali è a.
La soluzione u(x) del problema di Cauchy dato dall'equazione (2) con le condizioni iniziali $u^{(i)}(c)=y^{(i)}(a)$, (i=0,1, ... ,n-1) dipende in modo continuo dalle condizioni iniziali, quindi se c è prossimo ad a, y(x) e u(x) sono vicine e u(x) ha almeno n+k-1 zeri in $[c, \eta_k(a)+\varepsilon)$, dei quali il primo è c. Quindi η_k esiste in un interno di a, inoltre se $|c-a|<\delta_1$ allora $\eta_k(c)<\eta_k(a)+\varepsilon$. Rovesciando i ruoli di a e c, otteniamo $\eta_k(a)<\eta_k(c)+\varepsilon$ quando $|c-a|<\delta_2$ e ciò prova la continuità di η_k.

Sia ora η_k definita in un intervallo I, e siano a e $c\in I$ con $c<a$. Se per assurdo $\eta_k(c)=\eta_k(a)$, dato $\varepsilon<a-c$, per il Lemma 3 esiste una soluzione y(x) di (2) con n+k-1 zeri semplici in $(a-\varepsilon, \eta_k(a)]$ .Sia y*

una soluzione di (2) tale che $y^*(b) \neq 0$ e y^* e y sono linearmente indipendenti, per β sufficientemente piccolo $y_1 = y + \beta y^*$ ha almeno $n+k-1$ zeri in $(a-\varepsilon, \eta_k(a))$. Sia d il primo zero di y_1, si ha $\eta_k(d)$ $\quad_k(a)$, d c, ciò è impossibile.

Mostriamo infine, che se $\eta_k(a)$ esiste, η_k è definita in $[0,a)$.
Per quanto visto in precedenza η_k è definita in qualche intervallo I contenente a. Sia a' l'estremo inferiore di I. Allora: $a' < a$, η_k è definita e strettamente crescente in $(a',a]$.
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente tendente ad a', la successione $\eta_k(a_n)$ è convergente e c'è una successione di soluzioni estremali $y_i(x)$ tali che $y_i(x)$ si annulla in a_i ed ha n k-1 zeri in $[a_i, \eta_k(a)]$. Esiste una sottosuccessione di $y_i(x)$ che converge con le sue derivate, la sua funzione limite è quindi una soluzione dell'equazione (2) che si annulla in a' ed ha $n+k-1$ zeri in $[a', \eta_k(a)]$. Così $\eta_k(a')$ esiste. Se $a' > 0$, η_k è definita in un intorno di a', contrariamente alla definizione di a'.

Osserviamo che dai Teoremi 2 e 3 segue che se una soluzione $y(x)$ di (2) possiede m $(m \geq n)$ zeri in un intervallo semiaperto $(a,b]$ allora esiste una soluzione con m zeri semplici in (a,b).

Il Teorema 2 implica che non ci sono soluzioni dell'equazione (2) con $n+k-1$ zeri in $(a, \eta_k(a)]$,quindi il considerare nella definizione di η_k solo soluzioni che si annullano in a non è un'ipotesi riduttiva.

Concludiamoquesta sezione con un teorema che illustra i rapporti intercorrenti tra l'esistenza di punti coniugati e l'esistenza di soluzioni oscillatorie per l'equazione (2).

<u>Teorema 4</u>. Sia $p(x) \neq 0$, allora per l'equazione (2) le seguenti condizioni

sono equivalenti:

a) L'equazione ha una soluzione con infiniti zeri in $[0,\infty)$.

b) $\eta_1(a)$ esiste per ogni a.

c) Per un fissato c, $\eta_i(c)$ esiste per ogni i.

La dimostrazione di questo teorema segue banalmente dal seguente risultato di Elias [8] che risolve una nota congettura (cfr. Nehari [32]).

Teorema 5. Sia $p(x)\neq 0$, allora se l'equazione (2) non è oscillatoria su $[0,\infty)$, esiste un punto $c>0$ tale che essa è disconiugata in $[c,\infty)$.

3. PUNTI ESTREMALI $\vartheta_i(a)$ E SOLUZIONI ESTREMALI PER $[a, \vartheta_i(a)]$.

Mentre lo studio dei punti coniugati, esposto nella precedente sezione, presenta un interesse prevalentemente di carattere tecnico e sistematico, quello dei punti estremali e relative soluzioni estremali, dovuto a Elias [10] e Ahmad e Lazer [1], ha interesse per le sue applicazioni ai problemi di multipunti.

I risultati ottenuti mostrano che se p(x) non si annulla identicamente in un intervallo e $(-1)^{n-k}p(x) \geqslant 0$, allora non esiste una soluzione non-banale dell'equazione (2) soddisfacente un sistema omogeneo di condizioni al contorno (3), diconseguenza esiste un'unica soluzione soddisfacente un sistema non-omogeneo di condizioni al contorno del tipo (3) (nel caso del sistema (4) questa conclusione la si poteva già ricavare dal Lemma 1.). Nel caso $(-1)^{n-k}p(x) \leqslant 0$ invece, si possono presentare due eventualità:

non esiste una soluzione non-banale dell'equazione (2) soddisfacente (3), qualsiasi sia l'intervallo $[a,s]$ preso in considerazione come nel caso dell'equazione:

$$y''=0 \qquad (Ly=y''-y \ , \ \ p(x)=1)$$

e delle condizioni al contorno $y(a)=y(s)=0$;

esiste una soluzione non-banale solo per certi punti $\vartheta_i(a)$ come nel caso dell'equazione:

$$y''+y=0 \qquad (Ly=y''-y \ , \ \ p(x)=2)$$

e delle condizioni al contorno $y(a)=y(s)=0$.

In questo secondo caso è possibile stabilire proprietà di regolarità per la funzione $\vartheta_i(a)$ e determinare il numero degli zeri delle soluzioni estremali come risulta dai Teoremi 6 e 7 che seguiranno.

Per il sistema di condizioni al contorno (3) i risultati verranno ottenuti con l'ipotesi $(-1)^{n-k}p(x) < 0$, mentre per il particolare sistema (4) non occorre che questa disuguaglianza sia stretta.

TEOREMA 6. Se $p(x)\neq 0$, per ogni $a \in [0,\infty)$ l'insieme dei punti estremali relativi all'equazione (2) e al sistema di condizioni al contorno (3) è un insieme costituito da soli punti isolati (eventualmente vuoto) $\vartheta_i(a)$. Inoltre ϑ_i come funzione di a è differenziabile, strettamente crescente e il suo dominio di definizione è costituito da un intervallo della forma $[0,b)$, $0\leq b\leq\infty$.
Nel caso del sistema di condizioni al contorno (4) le stesse conclusioni valgono per una generica equazione (2).

TEOREMA 7. Sia $p(x)\neq 0$, allora se $\vartheta_i(a)$ è un punto estremale relativo alla equazione (2) e al sistema di condizioni al contorno (3) e $y(x)$ è una soluzione estremale per $[a, \vartheta_i(a)]$, $L_t y(x)$ $(t=0,\ldots n-1)$ ha in $(a,\vartheta_i(a))$ $i+l_t$ (l_t dipendente solo dalle quasi-derivate che figurano in (3)) zeri distinti ciascuno dei quali è semplice.
Nel caso del sistema di condizioni al contorno (4) le stesse conclusioni valgono per una generica equazione (2) inoltre si ha: $l_o=-1$.
In entrambi i casi la soluzione è unica a meno di una costante moltiplicativa.

Il teorema 6 può essere considerato come una estensione del teorema di separazione di Sturm (cfr. Sturm [28] oppure Hartmann [30]).

Occorre rilevare che i teoremi di confronto e separazione di Sturm vengono stabiliti per l'equazione:

(8) $$(r(x)y')'+p(x)y=0$$

senza porre restrizioni sul segno della $p(x)$, comunque il supporre nella equazione (8) $p(x)$ di segno costante non è restrittivo, infatti se si definiscono nuove variabili v ed s tramite le relazioni: $y(x)=v(x)e^{2hx}$, $dx/ds=e^{2hx}$, $x(0)=0$ con h costante, la (8) prende la forma:

(9) $$d/ds(R(s)dv/ds) + P(s)v=0$$

dove $P(s)=e^{4hx}\left[p(x)+h^2r(x)+hr'(x)\right]$ e $R(s)=r(x)$. Essendo $r(x)>0$, segue che per ogni x-intervallo limitato, P(s) può essere reso positivo sul corrispondente s-intervallo prendendo h sufficientemente grande. Poichè il cambiamento di variabili stabilisce una corrispondenza preservante l'ordine tra gli zeri di una soluzione di (8) e gli zeri della corrispondente soluzione di (9) ; e poichè i teoremi diSturm si applicano solo agli intervalli limitati si ha la tesi.

Il ruolo svolto nel caso dei punti coniugati dalla funzione M(y), viene svolto nel caso dei punti estremali dalla N*(y) che definiamo ora:

Sia y(x) una soluzione dell'equazione (2) e $a \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_r \leqslant b$ gli zeri delle quasi-derivate della y in $[a,b]$; definiamo:

(10) $$N^*(y) = S(y,a+)+S(y,b-)+\sum_{a<x_t<b} \langle n(x_t,y) \rangle ,$$

dove $\langle q \rangle$ denota il più grande intero pari non superiore a q.

<u>LEMMA 4</u>. Supponiamo che p(x) non si annulli identicamente su un intervallo, allora per ogni soluzione non-banale y dell'equazione (2) si ha:

$$N^*(y) \leqslant n \ ;$$

S(y,b-) e n-S(y,a+) sono entrambi pari [dispari] se $p(x) \leqslant 0$ $[p(x) \geqslant 0]$. Inoltre se $N^*(y) = n$, allora $L_{t+1}y$ ha esattamente un cambiamento di segno tra due zeri consecutivi di $L_t y$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $a < x_1 \leqslant \dots \leqslant x_r < b$ gli zeri di $L_o y, \dots, L_{n-1} y$ in (a,b) e prendiamo c e d in mode che: $a < c < x_1$, $x_r < d < b$ e $p(c) \neq 0$, $p(d) \neq 0$. Tra i punti $x_1, \dots, x_r$, siano $\{x_{i,t}\}$ gli zeri di $L_t y$ che non sono zeri di $L_{t-1} y$. Sia β_t la somma del numero di quasi-derivate consecutive partenti con $L_t y$, che si annullano in $[c,d]$. Se $m_1, m_2, \dots, m_q$ quasi-derivate consecutive partenti con $L_{t-1} y$ si annullano rispettivamente nei punti $c < z_1 \leqslant z_2 \leqslant \dots \leqslant z_q < d$, allora $\beta_{t-1} = m_1 + m_2 + \dots + m_q$. Negli stessi punti si annullano $m_1 - 1, \dots, m_q - 1$ quasi-derivate consecutive partenti con $L_t y$, inoltre per il teorema di Rolle $L_t y$ cambia segno in ciascuno degli intervalli (z_i, z_{i+1}), dunque si ha:

$$\beta_t=(m_1-1)+\dots+(m_q-1)+\sum n(x_i,t) \geqslant$$
$$\geqslant \beta_{t-1}+\sum_{[c,z_1)} n(x_{i,t})+\sum_{(z_q,d]} n(x_i,t)+\sum_{(z_1,z_q)}\langle n(x_{i,t})\rangle -1.$$

Consideriamo il caso $t\neq 0$, allora se sgn $[L_t y(c+\varepsilon)]$ =sgn $[L_{t-1}y(c+\varepsilon)]$, $\varepsilon > 0$, $L_t y$ ha almeno uno zero in (c,z_1), per il quale $n(x_{i,t})$ è dispari. Altrimenti $L_t y$ sarebbe di segno costante in (c,z_1) e così:

$$L_{t-1}y(z_1)=L_{t-1}y(c)+\int_c^{z_1} L_t y(x)/r_{t+1}(x)dx \neq 0.$$

In prossimità di d la situazione è analoga, dunque:

(11) $\beta_t \geqslant \beta_{t-1}+S(L_{t-1}y(c+\varepsilon),-L_t y(c+\varepsilon))+S(L_{t-1}y(d-\varepsilon),L_t y(d-\varepsilon))+\sum_{(a,b)}\langle n(x_{i,t})\rangle-1.$

Nel caso t=0, si può ripetere un procedimento analogo in quanto i punti in cui $L_n y$ cambia di segno sono punti in cui $L_0 y$ ha uno zero di ordine dispari, si ha così:

(12) $\beta_0 \geqslant \beta_{n-1}+S(L_{n-1}(c+\varepsilon),-L_n y(c+\varepsilon))+S(L_{n-1}y(d-\varepsilon),L_n y(d-\varepsilon))+\sum_{(a,b)}\langle n(x_{i,0})\rangle-1.$

Addizionando le disuguaglianze (11) per t=1, ... ,n-1 e la (12) otteniamo:

$$n \geqslant S(L_0y(c+\varepsilon),-L_1y(c+\varepsilon),\dots,(-1)^n L_n y(c+\varepsilon)) +$$
$$S(L_0y(d-\varepsilon),\dots,L_n y(d-\varepsilon))+\sum_{a<x_i<b}\langle n(x_i)\rangle$$

per ε sufficientemente piccolo, che in virtù della scelta dei punti c e d prova la (10).

Se $N^*(y)=n$, nessuna delle disuguaglianze (11) e (12) può essere stretta e questo prova l'asserzione sulla localizzazione dei cambiamenti di segno delle quasi-derivate.

Le parità di $S(y,b-)$, $n-S(y,a+)$ possono essere determinate facilmente contando i cambiamenti di segno nella successione $L_0y=r_1y,\dots,L_ny=-py$ e $L_0y,-L_1y,\dots,(-1)^nL_ny$.

Osserviamo che se $L_t y(a)=0$, allora sgn $[L_{t+1}y(a+\varepsilon)]$ = sgn $[L_t y(a+\varepsilon)]$ e quindi il Lemma 4 implica il seguente corollario:

COROLLARIO 4. Se $p(x)$ non è identicamente nulla in un intervallo, allora se $a=x_1 \leq x_2 \leq ,\ldots, \leq x_r=b$ sono gli zeri di una soluzione dell'equazione (2) in $[a,b]$ si ha:

$$(13) \qquad N(y) \equiv \nu(a,y) + \gamma(b,y) + \sum_{a \leq x_i \leq b} < n(x_i,y) > n.$$

Se $N(y)=n$ allora: $\nu(a,y)=S(y,a+)$, $\nu(b,y)=S(y,b-)$ ed inoltre $\gamma(b,y)$ e $n-\gamma(a,y)$ sono pari [dispari] se $p(x) \leq 0$ [$p(x) \geq 0$].

In virtù del Corollario 4 se $(-1)^{n-k}p(x) \geq 0$ e $p(x)$ non è identicamente nulla in un intervallo, non esistono soluzioni non-banali della equazione (2) verificanti il sistema (3), quindi nel seguito assumeremo sempre $(-1)^{n-k}p(x) \leq 0$.

Dall'algebra lineare si ha che se togliamo una condizione dal sistema (3) allora esiste sempre una soluzione non-banale dell'equazione (2) verificante le n-1 condizioni rimanenti. Il Lemma 4 ci permette di ricavare alcune importanti considerazioni su questa soluzione, $y(x,s)$.

LEMMA 5. Sia $(-1)^{n-k}p(x) \leq 0$. Quando vengono considerate solo n-1 condizioni al contorno:

$$(14) \qquad \begin{array}{ll} L_i y(a)=0 & i \in \{i_1,\ldots,i_k\} \\ L_j y(s)=0 & j \in \{j_1,\ldots,j_{n-k-1}\} \end{array}$$

valgono i seguenti risultati:

a) L'equazione (2) ha essenzialmente un'unica soluzione verificante (14).

b) Nessuna quasi-derivata oltre a quelle che figurano in (14) si annulla in a; $\operatorname{sgn}[L_{i+1}y(a+\varepsilon,s)]=\operatorname{sgn}[L_i y(a+\varepsilon,s)]$ se e solo se $i \in \{i_1,\ldots,i_k\}$.

c) Al più una quasi-derivata oltre a quelle date in (14) si annulla in s. In s si ha: $S(y(x,s),s-)=n-k$ e n-k-1 di questi cambiamenti di segno sono determinati da $j_1,\ldots,j_{n-k-1}$.

d) $L_t y(x,s)$ e i suoi zeri semplici sono funzioni differenziabili di s.

DIMOSTRAZIONE. Le prime 3 affermazioni seguono facilmente dal Lemma 4 e dal Corollario 4, per dimostrare la d) consideriamo un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (2) $u_1, u_2, \dots, u_n$, si ha che:

$$(15)\qquad y(x,s)=\begin{vmatrix} L_{i_1}u_1(a), & \dots & L_{i_k}u_1(a), & L_{j_1}u_1(s), & \dots, & L_{j_{n-k-1}}u_1(s), & u_1(s)\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ L_{i_1}u_n(a), & \dots & L_{i_k}u_n(a), & L_{j_1}u_n(s), & \dots, & L_{j_{n-k-1}}u_n(s), & u_n(s)\end{vmatrix}$$

in virtù di questa rappresentazione e del teorema della funzione implicita segue che le quasi-derivate $L_t y(x,s)$, $t=0, \dots, n-1$ assieme ai loro zeri semplici sono funzioni differenziabili di S.

Consideriamo il seguente determinante:

$$W(s)=\begin{vmatrix} L_{i_1}u_1(a), & \dots & L_{i_k}u_n(a), & L_{j_1}u_1(s), & \dots, & L_{j_{n-k}}u_1(s)\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ L_{i_1}u_n(a), & \dots & L_{i_k}u_n(a), & L_{j_1}u_n(s), & \dots, & L_{j_{n-k}}u_n(s)\end{vmatrix}$$

Ovviamente W(s) dipende in modo differenziabile da S e i punti estremali relativi al sistema (3) sono gli zeri di W(s) in $(a,+\infty)$.
Il prossimo teorema mostra che tali punti, se esistono, sono isolati.

<u>TEOREMA 8.</u> Se $(-1)^{n-k}p(x)<0$, i punti estremali relativi al sistema (3) sono zeri semplici della funzione W(s), nel caso particolare del sistema (4) ciò è valido anche se $(-1)^{n-k}p(x)\leq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per mettere in rilievo la dipendenza di W(s) da gli indici $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$, useremo la notazione $W(s;j_1, \dots, j_{n-k})$.
Per le regole di derivazione di un determinante si ha:

$$(16)\qquad d/ds\, W(s;j_1,\dots,j_{n-k}) = \sum_{t=1}^{n} W(s;j_1,\dots,j_t+1,\dots,j_{n-k})/r_{j_t+2}(s).$$

Indichiamo con s un punto estremale relativo al sistema (3), così :

$$(17)\qquad W(s;j_1, \dots, j_{n-k}) = 0$$

Tutti i determinanti al secondo membro di (16) sono diversi da zero; infatti se:

(18) $$W(s,j_1, \ldots ,j_t+1, \ldots ,j_{n-k}) = 0 ,$$

da (17) segue che esiste y_1, cioè la corrispondente soluzione estremale, che soddisfa (3), mentre per la (18) esiste y_2 che soddisfa le condizioni del sistema (3), con j_t+1 al posto di j_t. Se y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti allora si ha $N(y) = n+1$ che è impossibile per il Corollario 4. D'altra parte se y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti esiste una loro combinazione lineare che ha $k+1$ zeri in a e $n-k-1$ zeri in b, contraddicendo ancora il Corollario 4.

Nel caso del sistema (4), il secondo membro di (16) è costituito da un solo termine, inoltre è possibile trovare le stesse conclusioni sulla dipendenza di y_1 e y_2 usando unicamente il Lemma 1 valido per $p(x)$ di segno costante, quindi in questo caso il teorema è dimostrato.

Per provare il teorema nel caso del sistema (3), si mostra che ogni coppia di termini della sommatoria (16) ha lo stesso segno. Daremo un breve cenno di come procede questa dimostrazione.

Consideriamo il termine r-esimo (W_r) e q-esimo (W_q), basterà verificare che $\operatorname{sgn}[W_r] = \operatorname{sgn}[W_q]$.

Si considerino 2 soluzioni dell'equazione (2) : $y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$ soddisfacenti a $n-1$ condizioni al contorno date dal sistema (3) a cui sono state tolte rispettivamente le quasi-derivate j_q e j_r. Essendo queste soluzioni essenzialmente uniche per il Lemma 5, esse sono soluzioni estremali e differiscono per una costante moltiplicativa. Differenziando si ha :

$$(-1)^{n-k-q+1} L_{j_q+1}y_1(x,s)\big|_{x=s} = W(s;j_1,\ldots,j_q+1,\ldots,j_{n-K}) = W_q .$$

Da questa relazione e dal Lemma 5 segue che:

$$\operatorname{sgn}[W_q] = (-1)^{n-k-1}\operatorname{sgn}\left[y_1(x,s)\big|_{x=s}\right] .$$

Una simile relazione è valida anche per W_r e $y_2(x,s)$ e quindi:

(19) $$\operatorname{sgn}\left[W_q W_r\right] = \operatorname{sgn}\left[y_1(x,s)y_2(x,s)\right].$$

Sciegliamo i_{k+1} differente da $i_1,\ldots,i_k$ e sia y_3 una soluzione dell'equazione (2) verificante il sistema:

$$(20)\qquad \begin{array}{ll} L_i y(a) = 0 & i \in \{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}\} \\ L_j y(s) = 0 & j \in \{j_1, \dots, j_{n-k}\} - \{j_q, j_r\} \end{array}$$

tramite la rappresentazione di $y_1(x,s)$ e $y_2(x,s)$ date in (15) si può verificare che:

$$(21)\qquad \begin{array}{l} L_{i_{k+1}} y_1(a,s) = (-1)^r L_{j_r} y_3(x,s)\Big|_{x=s} \\ L_{i_{k+1}} y_2(a,s) = (-1)^{q-1} L_{j_q} y_3(x,s)\Big|_{x=s} \end{array}$$

Dal Lemma 4 e dall'ipotesi $(-1)^{n-k}p(x) < 0$ si ricava:

$$(22)\qquad \operatorname{sgn}\left[L_{jr} y_3(x,s)\Big|_s\right] = (-1)^{r-q+1} \operatorname{sgn}\left[L_{jq} y_3(x,s)\right].$$

Le relazioni (22) e (21) implicano:

$$\operatorname{sgn}\left[L_{i_{k+1}} y_1(a,s)\right] = \operatorname{sgn}\left[L_{i_{k+1}} y_2(a,s)\right]$$

che a sua volta implica, insieme alla (19) che $\operatorname{sgn}\left[W_q W_r\right] > 0$ e quindi il teorema è dimostrato.

Il Teorema 8 implica che l'insieme dei punti estremali, quando non è vuoto, è un insieme di punti isolati $\vartheta_i(a)$. Essendo $\vartheta_i(a)$ uno zero semplice di $W(a,s)$ per il Teorema della funzione implicita ϑ_i è differnziabile in un intorno di a e risulta :

$$\frac{d\vartheta_i(a)}{da} = -\frac{\partial W}{\partial a} \Big/ \frac{\partial W}{\partial s}\Big|_{s=\vartheta_i(a)}$$

inoltre ϑ_i può essere prolungata fino a quando essa rimane limitata.
Analogamente al Teorema 6 è possibile verificare che:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \sum_{t=1}^{k} W(a, \vartheta_i(a); i_1, \dots, i_t+1, \dots, i_k, j_1, \dots j_{n-k}) \neq 0$$

(anche in questo caso per il sistema (4) si userà nella dimostrazione il Lemma 1 anzichè il Lemma 4, cosicchè si può assumere $(-1)^{n-k}p(x) \leq 0$), così $\vartheta_i'(a) \neq 0$ e ϑ_i è monotona. Essa risulta crescente, altrimenti potrebbe essere continuata fino a che cada la disuguaglianza $a < \vartheta_i(a)$.
Dunque se $\vartheta_i(a)$ esiste, ϑ_i è definita in qualche intervallo aperto A

contenente a. Sia a'=inf.A. Per ogni $b \in (a',a]$, $\vartheta_i(b)$ esiste, cioè $W(b,\vartheta_i(b))=0$ e quindi per continuità anche $\vartheta_i(a')$ esiste. Se $a'>0$, allora ϑ_i è definita in un intorno di a', così a'=0.
Tutte queste considerazioni sono valide per il sistema (4) anche se $(-1)^{n-k}p(x)\leqslant 0$ e così il Teorema 6 è completamente dimostrato.
Per quanto riguarda la determinazione del numero degli zeri delle quasi-derivate delle soluzioni estremali relative al sistema (3), se $(-1)^{n-k}p(x)<0$ è conseguenza del Corollario 4 che: nessun'altra quasi-derivata si annulla in a e $\vartheta_i(a)$ tranne quelle che figurano nel sistema (3); le quasi-derivate in $(a,\vartheta_i(a))$ hanno solo zero semplici e inoltre L_t ha esattamente uno zero tra 2 zeri consecutivi di L_t-1, nel caso del sistema (4) analoghe considerazioni valgono in virtù del Lemma 1 anche nel caso in cui $(-1)^{n-k}p(x)\leqslant 0$.
Il prossimo Lemma ci indica anche come varia il numero degli zeri delle quasi-derivate delle soluzioni estremali in funzione del punto estremali ϑ_i, per far ciò verrà utilizzata la soluzione $y(x,s)$, verificante le n-1 condizioni, introdotta nel Lemma 5.

<u>LEMMA 6.</u> Il numero di zero semplici di $L_r y(x,s)$, $0\leqslant r\leqslant n-1$, in (a,s) può variare, al crescere di s, solo quando uno zero semplice entra in (a,s) attraverso il punto variabile s.

DIMOSTRAZIONE. In virtù del Lemma 4 e 5, due zeri semplici di $L_r y(x,s)$ in (a,s) non si possono incontrare in $[a,s]$, nè può uno zero semplice incontrare il punto a, quando s varia. Poichè gli zeri semplici sono funzione continua di s, il loro numero in (a,s) può variare solo quando uno zero semplice entra in (a,s) oppure lascia questo intervallo attraverso il punto s.
Proveremo, che, al crescere di s, zeri semplici di $L_r y(x,s)$ possono solo entrare in (a,s).
Si può verificare facilmente che è sufficiente provare il teorema nel caso di quasi-derivate che non figurano tra le condizioni al contorno (14) poste in s.

Sia $L_r y(x,s)$ una tale quasi-derivata, distinguiamo 2 casi:

1° $\qquad r+1 \notin \{ j_1, \dots j_{n-k-1} \}$.

In questo caso se $L_r y(x,s_o)=0$, s_o è uno zero semplice per $L_r y(x,s_o)$. Per il teorema della funzione implicita c'è uno zero $x(s)$ di $L_r y(x,s)$ tale che $x(s_o)=s_o$, differenziando il determinante (15), che rappresenta $L_r y(x,s)$, rispetto a x e s, sostituendo $s=s_o$, $x=x(s_o)=s_o$ e con un procedimento analogo a quello usato nel Teorema 8 si può verificare che: $x'(s_o) \leqslant 0$. La funzione $d(s)=x(s)-s$ soddisfa $d(s_o)=0$, $d'(s_o) \leqslant -1$, quindi quando s cresce e passa attraverso s_o, $x(s)$ entra nell'intervallo (a,s).

2° $\qquad r+1 \in \{ j_1, \dots, j_{n-k-1} \}$.

Sia s_o tale che $L_r y(x,s_o)=0$, è possibile modificare L e p nell'equazione (2) in modo che essa rimanga invariata per $s \leqslant s_o$ e che ammette in (s_o,∞) tutti i punti estremali s_n, $n \geqslant 1$. Per provare che quando s passa attraverso s_o uno zero semplice viene ad aggiungersi in (a,s) è sufficiente provare che $L_r y(x,s_1)$ ha più zeri in (a,s_1) che $L_r y(x,s_o)$ in (a,s_o). Sia $y_1(x,s)$ l'unica soluzione di (2) soddisfacente le condizioni:

$$\begin{array}{ll} L_i y(a) = 0 & i \in \{ i_1, \dots, i_k \} \\ L_j y(s) = 0 & j \in \{ j_1, \dots, j_{n-k-1}, r \} - \{ j_q \} \end{array}$$

dove j_q è un'indice tale che $j_q+1 \notin \{ j_1, \dots j_{n-k-1}, r \}$.

Essendo $L_r y(x,s_o)=0$, possiamo assumere che $y_1(x,s_o) \equiv y(x,s_o)$ e nello stesso modo, $y_1(x,s_1) \equiv y(x,s_1)$. Per come è stato scelto j_q e per la 1ª parte della dimostrazione si ha che $L_{j_q} y_1(x,s_1) \equiv L_{j_q} y(x,s_1)$ ha uno zero in più in (a,s_1) rispetto agli zeri che $L_{j_q} y_1(x,s_o) \equiv L_{j_q} y(x,s_o)$ ha in (a,s_o). $L_{t+1} y(x,s_o)$ ha esattamente uno zero semplice tra due zeri consecutivi di $L_t y(x,s_o)$ in $[a,s_o]$ e questi sono i suoi unici zeri in (a,s_o); la stessa proprietà vale per $L_{t+1} y(x,s_1)$ in (a,s_1). Da queste considerazioni segue che per ogni t, $0 \leqslant t \leqslant n-1$, $L_t y(x,s_1)$ ha esattamente uno zero semplice in (a,s_o). In particolare ciò è valido per t=r, completando la prova del lemma.

Nel corso della dimostrazione del Lemma 6 abbiamo visto che dati due punti estremali consecutivi s_o, s_1, $L_t y(x,s_1)$ ha uno zero in più in (a,s_1) rispetto agli zeri che $L_t y(x,s_o)$ ha in (a,s_o); questo fatto assieme al noto risultato (cfr. Coppel [5]) che nel caso del sistema (4) $y(x, \vartheta_1(a))\neq 0$ in $(a, \vartheta_1(a))$ (quindi $l_o=-1$) dimostra il Teorema 7 nel caso $(-1)^{n-k}p(x)< 0$.

Per completare la dimostrazione del Teorema 7 ci occorre il seguente lemma che si può dimostrare utilizzando il Teorema 3.2 in [30] .

<u>LEMMA 7.</u> Sia $p(t)$ di segno costante e supponiamo che $\vartheta_i(a)$ esiste. Siano $r_1, \dots ,r_{k+1}$ le funzioni risultanti dalla fattorizzazione (1) dell'operatore L dell'equazione (2) nell'intervallo $[a,c]$, $c >\vartheta_i(a)$.
Siano inoltre per ogni $q \in \mathbb{N}$ $r_{q,k}(t)$ $1\leqslant k\leqslant n+1$ e $p_q(t)$ funzioni tali che $r_{q,k}(t) > 0$ in $[a,c]$ e tali che:

$$\lim_{q\to\infty} r^{(j)}_{q,k}(t) = r^{(j)}_k(t) \qquad j=0, \dots ,n-k+1, \qquad \lim_{q\to\infty} p_q(t)=p(t)$$

Allora per q sufficientemente grande esiste il punto estremale $\vartheta^q_i(a)$ relativo all'equazione:

$$(23_q) \qquad r_{q,n+1}Dr_{q,n}D\dots r_{q,2}Dr_{q,1}y + p_q y=0$$

e si ha:

$$\lim_{q\to\infty} \vartheta^q_i(a) = \vartheta_i .$$

Sia $(-1)^{n-k}p(x)\leqslant 0$ e supponiamo che esiste il punto estremale $\vartheta_i(a)$ relativo al sistema (4). Sia $c > \vartheta_i(a)$ e siano $\{p_q\}^{\infty}_1$ e $\{r_{q,k}\}^{\infty}_1$, $k=1,\dots,n+1$ successioni difunzioni che soddisfano le ipotesi del Lemma 7 con $(-1)^{n-k}p_q(x)< 0$. Dal lemma precedente si ha: $\vartheta^q_i(a)\to \vartheta_i(a)$ quando $q\to\infty$. Sia y_q una soluzione estremale di (23_q) per l'intervallo $[a,\vartheta^q_i(a)]$ tale che:

$$y^{(k)}_q(a)^2+y^{(k+1)}_q(a)^2+\dots+y^{(n-1)}_q(a)^2=1.$$

Passando eventualmente ad una sottosuccessione possiamo assumere senza perdere di generalità, che $y^{(i)}_q(a) \to c_j$ $j=k,\dots,n-1$ quando $q\to\infty$,

$c_k^2+\ldots+c_{n-1}^2=1$. Sia y_o una soluzione dell'equazione (2) definita dalle condizioni iniziali: $y_o^{(j)}=0$, $0\leqslant j\leqslant k-1$, $y_o^{(j)}(a)=c_j$, $k\leqslant j\leqslant n-1$, allora $y_q^{(j)}(x)\to y_o^{(j)}(x)$ uniformemente in $[a,c]$. In particolare $y_o^{(j)}(\vartheta_i)=$ $=\lim_{q\to\infty} y_q^{(i)}(\vartheta_i^q)=0$ per $j=0,\ldots,n-k-1$, così y_o è una soluzione estremale dell'equazione (2) per $[a,\vartheta_i(a)]$. In virtù del Lemma 1 y_o ha solo zeri semplici in $(a,\vartheta_i(a))$. Poichè il Teorema 7 è già stato dimostrato nel caso in cui $(-1)^{n-k}<0$, $y_q(x)$ ha esattamente i-1 zeri, e tutti semplici in $(a,\vartheta_i(a))$; quindi y_o ha $h\leqslant i-1$ zeri semplici in $(a,\vartheta_i(a))$. Se $h<i-1$ esiste una successione $\{t_q\}_1^\infty$ tale che $y_q(t_q)=0$ e $t_q\to a$ oppure $t_q\to b$ quando $q\to\infty$. Usando ripetutamente il teoreme di Rolle e tramite le condizioni al contorno (4) si ha che esiste una successione $\{s_r\}_1^\infty$ tale che: o $\lim s_r=a$ e $y_q^{(k)}(s_r)=0$ oppure $\lim s_r=b$ e $y_q^{(n-k)}(s_r)=0$. Ambedue queste conclusioni violano il Lemma 1 e quindi il teorema 7 è dimostrato.

(L'unicità della soluzione estremale è conseguenza immediata del Lemma 1 e del Corollario 4).

4. PROBLEMI DI AUTOVALORI ED ESTENSIONE DEL TEOREMA DI CONFRONTO DI STURM.

Si consideri l'equazione differenziale:

$$Ly + \lambda p(x)y = 0, \tag{24}$$

con l'operatore L e la funzione p soddisfacenti alle stesse ipotesi poste sull'equazione (2); e il problema di autovalori dato da:

(25) $Ly+ \lambda\, p(x)y=0$, con y soddisfacente il sistema di condizioni al contorno (3).

Il problema (25) è stato studiato da diversi autori: Leighton e Nahari [20] studiano il caso di problemi autoaggiunti del quarto ordine. Krein [18] , [19] prova che il problema non autoaggiunto dato dall'equazione (24) con le condizioni al contorno (4) è equivalente a un'equazione integrale con un nucleo oscillante. Da questo, utilizzando la teoria dei nuclei oscillanti, dovuta a Kellogg [34] , [35] nel caso autoaggiunto e Gantmacher [33] nel caso non-autoaggiunto, egli deduce l'esistenza di autofunzioni e le proprietà dei loro zeri. Kalrlin [17] considera un operatore L e delle condizioni al contorno più generali che in (25), egli prova che se la corrispondente funzione di Green esiste (cioè se λ =0 non è autovalore) allora $\pm$ G(x,t) è un nucleo oscillante.

Qui verranno esaminati i risultati di Elias [9] inerenti il problema (25) ottenuti utilizzando i metodi degli operatori disconiugati esposti nelle precedenti sezioni.

Valgono i seguenti teoremi:

<u>TEOREMA 9.</u> Per il problema (25) valgono le seguenti affermazioni:

a) il problema ammette un numero infinito di autovalori reali;

b) l'insieme degli autovalori non ha punti di accumulazione finiti e il segno degli autovalori è determinato da $(-1)^{\nu(s)}\lambda\, p(x) \leqslant 0$;

c) a ogni autovalore non nullo corrisponde un'unica (a meno di un fattore costante) autofunzione. Tale autofunzione e le sue quasi-derivate possono avere in (a,s) solo zeri semplici;

d) nessuna delle quasi-derivate, eccetto quelle date in (3), si può annullare nei punti estremi a e s.

<u>TEOREMA 10.</u> Se $\lambda=0$ è un autovalore del problema (25) allora ad esso corrispondono solo un numero finito di autofunzioni linearmente indipendenti; se queste autofunzioni sono ordinate in modo opportuno e le altre autofunzioni sono ordinate secondo la grandezza del rispettivo autovalore allora l'i-esima autofunzione possiede esattamente i-1 zeri semplici in (a,s).

Dal Corollario 4 segue che se esiste una autofunzione corrispondente ad un autovalore reale λ diverso da zero si deve avere: $(-1)^{\nu(s)}\lambda\, p(x)\leq 0$
Sia $y_0, \dots, y_{n-1}$ il sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (24) determinato da $L_i y_j(a) = \delta_{ij}$ $i,j = 0, \dots ,n-1$.

Gli autovalori del problema (25) sono gli zeri della funzione $\Delta(\lambda)$ definita tramite il determinante:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} L_{i_1} y_0(a) & \dots & L_{i_k} y_0(a), & L_{j_1} y_0(s), & \dots & L_{j_{n-k}} y_0(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{i_1} y_{n-1}(a) & \dots & L_{i_k} y_{n-1}(a), & L_{j_1} y_{n-1}(s) & \dots & L_{j_{n-k}} y_{n-1}(s) \end{vmatrix}$$

$y_0(x) \dots ,y_{n-1}(x)$ sono funzioni analitiche intere di λ, dunque anche $\Delta(\lambda)$ è intera; ciò implica che se gli autovalori esistono essi non hanno punti di accumulazione finiti, altrimenti $\Delta(\lambda)$ sarebbe identicamente nulla e ogni λ sarebbe un autovalore, mentre il problema (25), per quanto osservato in precedenza, non può avere contemporaneamente autovalori positivi e negativi. Ancora in virtù del Corollario 4 si ha che, se esiste un autovalore reale diverso da zero del problema (25), esso ammette un'autofunzione essenzialmente unica e che tale autofunzione verifica le affermazioni c) e d) del Teorema 9; per concludere la dimostrazione di tale teorema è sufficiente quindi dimostrare l'esistenza degli autovalori reali.

(D'ora in poi λ sarà sempre considerato reale).

Consideriamo una soluzione $y(x,\lambda)$ dell'equazione (24) che soddisfa n-1 condizioni al contorno del sistema (3), ad esempio il sistema (14) ; se $\lambda \neq 0$, $y(x,\lambda)$ presenta molte analogie con la funzione $y(x,s)$ definita nella 3ª sezione;al Lemma 5, corrisponde il seguente Lemma per la $y(x,\lambda)$:

<u>LEMMA 8.</u> Se $y(x,\lambda)$ è una soluzione dell'equazione (24) soddisfacente alle n-1 condizioni del sistema (14), allora si ha:

a) per $\lambda \neq 0$, $y(x,\lambda)$ è essenzialmente unica;

b) due consecutive quasi-derivate di $y(x,\lambda)$ non si possono annullare nello stesso punto di (a,s). Inoltre al più una della quasi-derivate $L_o y(x,\lambda)$, ... ,$L_{n-1} y(x,\lambda)$ si può annullare nei punti a ed s oltre a quelli risultanti da (14);

c) $L_t y(x,\lambda)$ è una funzione analitica intera di λ. I punti dove $L_t y(x,\lambda)$ cambia il suo segno, considerati come funzione di λ, sono continui.

La dimostrazione delle a) e b) segue dal Corollario 4, mentre per la dimostrazione della c) si osservi che la $y(x,\lambda)$ ammette una rappresentazione analoga alla (15) rispetto al sistema fondamentale di soluzioni y_o,... ...,y_{n-1}. Poichè quest'ultime sono funzioni analitiche di λ anche la $y(x,\lambda)$ lo è. I punti dove $L_t y(x,\lambda)$ cambia di segno, in particolare gli zeri semplici, per la proprietà del valore intermedio, sono funzioni continue di λ.

Il prossimo lemma descrive il comportamento degli zeri di $y(x,\lambda)$ per $\lambda \to \infty$. (Per la dimostrazione del Lemma,qui non riportata, si veda Elias [9] , pag. 36).

<u>LEMMA 9.</u> In ogni intervallo $I \subset [a,s]$, $y(x,\lambda)$ e tutte le sue quasi-derivate cambiano segno se $|\lambda|$ è sufficientemente grande e il suo segno è detrminato da $\lambda(-1)^{\nu(s)}p(x) \leq 0$. Se $\nu(b) > 1$, l'osservazione è valida per valori di λ sufficientemente grandi di entrambi i segni.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9.

Per le considerazioni fatte in precedenza, è sufficiente provare che il problema (25) ha una successione infinita di autovalori reali.

Per il Corollario 4. si deve avere $(-1)^{\nu(s)}\lambda p(x) \leq 0$, assumiamo che gli autovalori siano positivi, ciò non è restrittivo in quanto la equazione (24) si può scrivere come $Ly+(-\lambda)(-p(x))y=0$.

Le autofunzioni di (25) sono funzioni $y(x,\lambda)$ per quei valori di λ per cui risulti che $L_{j_{n-k}} y(x,\lambda)$ si annulla in s. Quando $\lambda \to \infty$, per il Lemma 9, il Corollario 4 e il teorema di Rolle, il numero di zeri semplici di ogni quasi-derivata di $y(x,\lambda)$ tende a infinito; quindi per dimostrare il teorema è sufficiente provare che il numero di zeri semplici di una quasi-derivata $L_j y(x,\lambda)$ può variare, quando λ varia in (o,∞), solo quando uno zero semplice entra in (a,s) o lascia (a,s) tramite il punto s.

Per il Lemma 8 due zeri semplici di $L_j y(x,\lambda)$ in (a,s) non si possono incontrare quando λ varia, inoltre per il teorema della funzione implicita e il Lemma 8, gli zeri semplici di $L_j y(x,\lambda)$ in (a,s) sono funzioni continue di λ, ed essi possono essere estesi fino a quando non incontrano i punti estremi a o s. Quindi il numero degli zeri di $L_j y(x,\lambda)$ in (a,s) può variare solo quando uno zero semplice entra in (a,s) o lascia (a,s) attraverso i punti estremi; ma se uno zero semplice di $L_j y(x,\lambda)$ incontra a quando $\lambda \to \lambda_0 \neq 0$ una quasi-derivata di $y(x,\lambda)$ si annulla in a in aggiunta a quelle date in (14) e ciò è impossibile per il Corollario 4. Questo conclude la prova del teorema.

Dalla dimostrazione del Teorema 9 e dal Lemma 9 ricaviamo il seguente corollario:

<u>COROLLARIO</u> 5. Dato un sottointervallo di $[a,s]$, esiste una autofunzione appartente ad un autovalore sufficientemente grande, che cambia il suo segno in questo intervallo.

Per lo studio della distribuzione degli zeri delle autofunzioni è essenziale il prossimo lemma che ci permette, in un certo senso, di contare il numero degli zeri e dei cambiamenti di segno delle funzioni ottenute tramite l'applicazione degli operatori $L_o, L_1, \dots, L_{n-1}$, risultanti dalla fattorizzazione (1), ad una funzione $f \in C^n$ che non é necessariamente una soluzione di (2).

Sia $f \in C^n$ e siano $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_r$ gli zeri di $L_o f, \dots, L_{n-1} f$ in $[a,b]$, in modo tale che zeri comuni di derivate consecutive saranno considerati come zeri multipli, mentre indici distinti verranno usati per gli zeri di quasi-derivate non consecutive nello stesso punto. (Se una quasi-derivata si annulla su un sottointervallo di $[a,b]$, questo intervallo verrà considerato uno zero isolato). Con $n_h(x_i, f)$ indicheremo il numero di quasi-derivate consecutive tra le: $L_o f, \dots, L_{h-1} f$, che si annullano in x_i, non considerando gli zeri di quasi-derivate di ordine più alto. Per l'intervallo $[a,b]$ definiamo:

$$I(h) = \left\{ i \mid x_i = a \text{ oppure } x_i = b \text{ oppure } a < x_i < b \text{ e } n_h(x_i) \text{ è pari} \right\},$$

$$J(h) = \left\{ i \mid a < x_j < b \text{ e } n_h(x_j) \text{ è dispari} \right\},$$

$$N_h(f) = \sum_{i \in I(h)} n_h(x_i, f) + \sum_{j \in J(h)} (n_h(x_j, f) - 1).$$

<u>LEMMA 10</u>. Sia $f \in C^n$ e sia $L_h f \not\equiv 0$ su $[a,b]$, $1 \leqslant h \leqslant n$. Allora si ha:

(26) $\quad S(L_h f) \geqslant S(f) + N_h(f) - h.$

La dimostrazione di questo lemma non verrà qui riportata (cfr. Elias [9]), essa é analoga a quella del Lemma 4, la differenza sta nel fatto che $n_h(x_i)$ non è l'esatta molteplicità dello zero x_i e così una quasi-derivata può cambiare di segno indipendentemente dalla parità di $n_h(x_i)$.

Consideriamo dapprima il caso in cui $\lambda = 0$ è un autovalore.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione $Ly=0$ è dato dalle funzioni $y_o, \dots, y_{n-1}$ così definite:

$$y_0(x)=1/r_0(x),\quad y_1(x)=1/r_0(x)\int_a^x dt_1/r_1(t_1),\ \ldots ,$$

$$y_{n-1}(x)=1/r_0(x)\int_a^x dt_1/r_1(t_1)\int_a^{t_1} dt_2/r_2(t_2)\ \ldots\ \int_a^{t_{n-2}} dt_{n-1}/r_{n-1}(t_n-1).$$

Le prime m soluzioni e ogni loro combinazione lineare soddisfano: $L_m y=0$.

Se $u=\sum_{i=0}^{m-1} a_i y_i$, $a_{m-1}\neq 0$ e $v=\sum_{i=0}^{m-1} b_i y_i$, $b_{m-1}\neq 0$, sono due autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore $\lambda=0$, allora $b_{m-1}u-a_{m-1}v$ è anch'essa un'autofunzione ed è combinazione lineare solo di $y_0,\ldots,y_{m-2}$. Sia l il numero massimo di autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda=0$, per quanto osservato in precedenza queste autofunzioni possono essere scelte come:

$$(27)\quad u_i(x)=\sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij}y_i(x),\quad a_{m_i-1,i}\neq 0\ ,\quad i=1,\ldots,l\ ,\quad 1\leqslant m_1<\ldots<m_l\leqslant n.$$

Gli indici m_i, $1\leqslant i\leqslant l$, sono determinati unicamente dalla relazione precedente, mentre le autofunzioni u_i non lo sono in quanto ad u_i può essere addizionata un'arbitraria combinazione lineare di $u_0(x),\ldots,u_{i-1}(x)$.

<u>LEMMA 11</u>. Condizione necessaria e sufficiente affinche' $\lambda=0$ sia un autovalore a cui corrispondono esattamente l autofunzioni e che esista un insieme di l autofunzioni della forma (27), è che per ogni $m_i\leqslant q<m_{i+1}$, $0\leqslant i\leqslant l$ (dove i=0 significa $0<q<m_1$ e i=l significa $m_l\leqslant q<n$), almeno q-i condizioni al contorno sono poste su $L_0y,\ldots,L_{q-1}y$ ed esattamente m_i-i condizioni sono poste su $L_0y,\ldots,L_{m_i-1}y$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che a $\lambda=0$ corrispondano esattamente l autofunzioni $u_1,\ldots,u_l$ della forma (27). Sia $m_i\leqslant q<m_{i+1}$ ed assumiamo che al più q-i-1 condizioni al contorno sono poste su $L_0y,\ldots,L_{q-1}y$. Allora esistono i+1 funzioni v_j linearmente indipendenti e combinazione lineare solo di $y_0,\ldots,y_{q-1}$ che soddisfano queste q-i-1 condizioni e inoltre verificano: $L_qv_j=0$, questo è impossibile in quanto $q<m_{i+1}$ e per la (27) ci sono solo i autofunzioni indipendenti che sono combinazione lineare di $y_0,\ldots,y_{m_{i+1}-2}$. Quando $q=m_i-1$ concludiamo che almeno $(m_i-1)-(i-1)=r_i-i$ condizioni sono poste su $L_0y,\ldots,L_{m_i-2}y$. $u_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant l$, soddisfa $L_{m_i-1}u_i=a_{m_i-1,i}\neq 0$, quindi

per completare la prova della necessità è sufficiente mostrare che al più m_i-i condizioni sono poste su $L_0y,\dots,L_{m_i-2}y$. Procediamo per induzione su i.

Per i=1, supponiamo per assurdo che almeno m_1 condizioni sono poste su $L_0y,\dots,L_{m_1-2}y$. Per il Lemma 10 si ha:

$$S(L_{m_1-1}u_1) \geqslant S(u_1) + N_{m_1-1}(u_1) - (m_1-1) \geqslant 0 + m_1 - (m_1-1)=1,$$

contraddicendo il fatto che $L_{m_1-1}u_1=a_{m_1-1,1}\neq 0$.

Supponiamo che la proprietà è vera per i-1 e supponiamo per assurdo che almeno $(m_i-i)+1$ condizioni sono poste su $L_0y,\dots,L_{m_i-2}y$. Allora almeno m_i-m_{i-1} condizioni sono poste su $L_{m_{i-1}}y,\dots,L_{m_i-2}y$. Se consideriamo $L_{m_i-1}y$ come un operatore differenziale fattorizzabile di ordine $m_i-m_{i-1}-1$ applicato a $L_{m_{i-1}}y$, dal Lemma 10 si ha:

$$S(L_{m_i-1}u_i) \quad S(L_{m_{i-1}}u_i) + (m_i-m_{i-1}) - (m_i-m_{i-1}-1) \geqslant 1$$

contraddicendo $L_{m_i-1}u_i\neq 0$. Questo completa la prova della necessità.

La parte sufficiente segue facilmente per come sono state definite le funzioni $u_1,u_2,\dots,u_l$.

Dal Lemma 11 si ha che il fatto che $\lambda=0$ sia un autovalore dipende eslusivamente dagli indici che figurano in (3) e non dal particolare operatore disconiugato L o dai punti a e s scelti. Si ha infatti:

<u>TEOREMA 11</u>. $\lambda=0$ non è un autovalore del problema (25) se e solo se per ogni q=1,...,n almeno q condizioni al contorno sono poste sulle q quasi-derivate $L_0y,\dots,L_{q-1}y$.

Il Lemma 11 permette di dimostrare le affermazioni contenute nel Teorema 10 riguardanti le autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda=0$.

<u>LEMMA 12</u>. Il numero di zeri di u_i $1\leqslant i\leqslant l$ in (a,b) è al più i-1, inoltre l'autofunzione u_i può essere scelta in modo che abbia esattamente i-1 cambiamenti di segno in i-1 dati punti di (a,b).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che u_i abbia almeno i cambiamenti di segno in (a,s). Dal Lemma 10 si ha:

$$S(L_{m_i-1}u_i) \geqslant S(u_i) + N_{m_i-1}(u_i) - (r_i-1).$$

Per il Lemma 11 ci sono esattamente m_i-i condizioni al contorno imposte su $L_0y,\dots,L_{m_i-1}y$, inoltre come osservato nella dimostrazione del Lemma 11, non ci sono condizioni poste su $L_{m_i-1}y$, quindi:

$$S(u_i) + N_{m_i-1}(u_i) \geqslant i + (r_i-i)$$

Così si ha: $S(L_{m_i-1}u_i) \geqslant 1$, contrariamente al fatto che $L_{m_i-1}u_i$=cost$\neq$0.

La i-esima autofunzione u_i non è determinata unicamente e un'arbitraria combinazione lineare di $u_1,\dots,u_{i-1}$ può essere addizionata ad essa. Perciò possiamo determinare u_i in modo che abbia i-1 zeri in dati punti di (a,s). Per quanto visto in precedenza, questi i-1 punti sono zeri semplici di u_i ed essi sono i soli punti in (a,s) dove u_i cambia di segno.

Sciegliamo le autofunzioni $u_1,u_2,\dots,u_l$ che appartengono all'autovalore λ=0 come nel precedente Lemma e ordiniamo le altre autofunzioni in base alla grandezza del modulo del corrispondente autovalore. Questo è possibile in quanto gli autovalori non hanno punti di accumulazione finiti ed hanno tutti lostesso segno. u_{l+1} sarà quindi l'autofunzione corrispondente al primo autovalore diverso da zero, e così di seguito.

Elias [9] dimostra che anche la i-esima (i$>$l) autofunzione possiede esattamente i-1 zeri semplici in (a,s) completando così la dimostrazione del Teorema 10.(per brevità non riportiamo questa dimostrazione).

Concludiamo l'esame dei risultati raggiunti da Elias con l'analogo Teorema 8 per il determinante $\Delta(\lambda)$.

<u>TEOREMA 12.</u> Gli autovalori reali diversi da zero di (25) sono zeri semplici del deteminante $\Delta(\lambda)$, inoltre essi dipendono in modo differenziabile dai punti estremi dell'intervallo [a,s] considerato.

Ahmad e Lazer estendono in [1] il teorema di confronto di Sturm, all'equazione (2) e per sistemi di condizioni al contorno (4).
I risulltati ottenuti da Elias per il problema (25) permettono a questi autori di ottnere in [2] un'ulteriore estensione di questo risultato.

Consideriamo il seguente particolare sistema di condizioni al contorno (3) :

$$(28)\qquad \begin{array}{ll} L_i y(a)=0 & i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \\ L_j y(c)=0 & j \in \{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}\} \end{array}$$

dove $i_1, \dots, i_k$ e $j_1, \dots, j_{n-k}$ sono indici tali che il problema dato dall'equazione (24) con le condizioni al contorno (28) non ammette $\lambda=0$ come autovalore (come visto in precedenza questo fatto dipende unicamente dagli indici che figurano in (28)).

TEOREMA 13. Siano $p_1(x)$ e $p_2(x)$ continue su $[a,b]$ e supponiamo che:

$$(29)\qquad (-1)^{n-k} p_2(x) \leqslant (-1)^{n-k} p_1(x) \leqslant 0 \qquad \text{per ogni } x \in [a,b] .$$

Se $p_1 \neq p_2$ ed esiste una soluzione non banale dell'equazione :

$$(30)\qquad Lu + p_1(x)u = 0$$

con u soddisfacente il sistema (28) con c=b, allora esiste una soluzione non banale y dell'equazione:

$$(31)\qquad Ly + p_2(x)y = 0$$

che soddisfa il sistema (28) per qualche c con $a < c < b$.
Per dimostrare il TEOREMA 13 sono necessari i seguenti lemmi:

LEMMA 13. Supponiamo che p(x) non si annulli identicamente in un intervallo contenuto in $[a,c]$, e sia y una soluzione di (2) che soddisfa (28). Se $0 \leqslant h \leqslant n-1$, allora $L_h y$ si deve annullare in qualche punto di $[a,c]$.
DIMOSTRAZIONE.Per il Teorema 11 c'è almeno una condizione al contorno posta su $L_0 y$, quindi $L_0 y$ si annulla in $[a,c]$. Dal Lemma 10 : $S(L_h y)=S(y) + N_h(y) - h \geqslant 1$ per $1 \leqslant h \leqslant n-1$ e quindi il Lemma è dimostrato.

LEMMA 14. Se $\lambda_1(c)$ è il primo autovalore del problema dato dall'equazione (2) con le condizioni al contorno (28) si ha: $\lim_{c \to a^+} \lambda_1(c) = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per assurdo. Dal Teorema 9 si ha $\lambda_1(c)>0$ per $a<c\leqslant b$. Esiste una successione $\{c_m\}_1^{\infty}$ tale che $c_m > a$, $\lim_{m\to\infty} c_m = a$ e $\lim_{m\to\infty} \lambda_1(c_m)=\beta\geqslant 0$. Sia y_m, $m\geqslant 1$ l'autosoluzione corrispondente a $\lambda_1(c_m)$. Possiamo assumere che y_m è definita su $[a,b]$ e che: $\sum_{h=0}^{n-1} (L_h y_m(b))^2 = 1$

Per la compattezza della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ e passando eventualmente a una sottosuccessione si ha che esistono dei numeri $d_1, \dots ,d_n$ tali che:

(32) $$\lim_{m\to\infty} (L_h y_m)(b) = d_{h+1}, \qquad h=0,\dots,n-1; \qquad \sum_{h=1}^{n} d_h^2 = 1.$$

Sia $m\geqslant 1$ e poniamo $v_h=L_{h-1}y_m$, $h=1,\dots,n$ allora:

(33) $$v'_h = \frac{1}{r_{h+1}(x)} v_{h+1}, \quad h=1,\dots,n-1 ; \quad v'_n = -\frac{\lambda_1(c_m)p(x)}{r_{n+1}(x)r_1(x)} v_1(x)$$

Poichè $\lambda_1(c_m)\to \beta$, segue da (7) e dalla dipendenza continua delle soluzioni dalle condizioni iniziali e dai parametri che, se $z_1, \dots ,z_n$ sono funzioni che soddisfano un sistema di equazioni differenziali analogo a (33) con β al posto di $\lambda_1(c_m)$, e le condizioni iniziali:

(34) $$z_h(b) = d_h \quad , \qquad h = 1, \dots ,n-1$$

allora:

(35) $$\lim_{m\to\infty} L_h y_m(x) = z_{h+1}(x), \quad h = 0, \dots ,n-1$$

uniformemente in $[a,b]$. Per il Lemma 2 esistono dei punti $a_{o,m},\dots,a_{n-1,m}$ tali che $a_{h,m} \in [a,c_m]$ per $h=0,\dots,n-1$ e $L_h y_m(a_{h,m})=0$. Per la (34) ed essendo $\lim_{m\to\infty} a_{h,m}=0$, segue che $z_h(a)=0$ per $h=1,\dots,n$. Poichè il sistema (33) ammette la soluzione identicamente nulla, per il teorema di unicità per i sistemi differenziali si ha: $z_h(x) \equiv 0$ per $h=1,\dots,n$. Questo contraddice la (32) e (34) e così il lemma è provato.

<u>LEMMA 15.</u> Siano p_1 e p_2 funzioni continue su $[a,c]$ con $(-1)^{n-k}p_2(x)\leqslant$ $\leqslant(-1)^{n-k}p_1(x)\leqslant 0$ per $x \in [a,c]$, se per $m=1,2$ $Lu_m + p_m(x)u_m = 0$ e u_m verifica il sistema di condizioni al contorno (28) e si ha: $u_2(t)>0$ in (a,c) $u_2(t)\neq 0$, allora $p_1 \equiv p_2$ ed esiste β tale che $u_1 = \beta u_2$.

DIMOSTRAZIONE. Sostituendo u_1 con $-u_1$, se necessario, possiamo assumere che

$u_1(\underline{x}) > 0$ per qualche $\underline{x} \in (a,c)$. Sia q il più piccolo intero tale che $0 \leq q \leq n-1$ e $L_q u_2(a) \neq 0$, e sia r il più piccolo intero tale che $0 \leq r \leq n-1$ e $L_r u_2(c) \neq 0$. Essendo $u_2(x) > 0$ in (a,c) si ha che: $L_q u_2(a) \ngtr 0$ e $(-1)^r L_r u_2(c) > 0$. Dal fatto che $L_h u_1(a) = L_h u_2(a) = 0$ se $0 \leq h \leq q$ e $L_h u_2(c) = L_h u_1(c) = 0$ se $0 \leq h < r$ e che $u_2(x)$ è positiva in (a,c) si può ricavare che esiste α_1 tale che se $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ si ha:

(36) $$L_q(u_2 - \alpha u_1)(a) > 0, \qquad (-1)^r L_r(u_2 - \alpha u_1)(c) > 0,$$

e inoltre:

(37) $$u_2(x) + \alpha u_1(x) > 0 \qquad \text{per } x \in (a,c).$$

Essendo $u_1(\underline{x}) > 0$ le relazioni precedenti non possono valere per tutti gli $\alpha > 0$, quindi esiste β tale che esse valgono per $\alpha < \beta$, ma almeno una non è valida per $\alpha < \beta$. Chiaramente si ha:

(38) $$u_2(x) + \beta u_1(x) \geq 0, \qquad x \in (a,c)$$

Applicando lo stesso ragionamento usato per u_1 e u_2 a $w \equiv u_2 - \beta u_1$, dalle ipotesi e dalla (38) abbiamo che,o:

(39) $$L_q w(a) = 0;$$

(40) $$L_r w(c) = 0;$$

oppure

(41) $$w(x_o) = 0 \text{ per qualche } x_o \in (a,c).$$

La (39) e la (40) non possono essere valide in quanto altrimenti si avrebbe che almeno n+1 dei seguenti numeri :

$$L_o w(a), \ \dots \ , L_{n-1} w(a), \ L_o w(c), \ \dots \ , L_{n-1} w(c)$$

sono uguali a zero, e così per il Lemma 10 si avrebbe :

$$S(L_n w) = S(w) + N_n(w) - n \geq 1$$

contraddicendo il fatto che per la (38) e per l'ipotesi poste risulta :

(42) $$(-1)^{n-k}(Lw)(x) = (-1)^{n-k}\left[-p_1(x)w(x) + (p_1(x) - p_2(x))u_2(x)\right] \geq 0,$$

per tutti gli $x \in (a,c)$. Quindi la (41) deve essere valida per qualche $x_o \in (a,c)$. Usando ancora il Lemma 10 e con procedimenti simili a quelli visti in precedenza si può verificare che se $w(x_o) = 0$ allora w è identicamente nulla in $[a,c]$. Inoltre per la (42) si ha: $p_1(x) = p_2(x)$ e così il lemma è dimostrato.

Il Lemma 15 ci permette di dare un semplice teorema di confronto per gli autovalori del problema dato dall'equazione (24) con le condizioni al contorno (28)

TEOREMA 14. Siano $q_1(x)$ e $q_2(x)$ continue su $[a,b]$ e sia

(43) $$(-1)^{n-k} q_2(x) \leq (-1)^{n-k} q_1(x) \leq 0 \quad , \quad x \in [a,b] .$$

Se $q_1(x)$ non si annulla identicamente in un intervallo contenuto in $[a,b]$ e $q_1(x) \neq q_2(x)$ e se $\lambda_{1,i}$ è il primo autovalore relativo al problema: $Ly + \lambda q_i(x) = 0$, y soddisfacente (28) con c=b e i=1,2 si ha: $\lambda_{1,2} < \lambda_{1,1}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano w_i autofunzioni positive in (a,b), corrispondenti all'autovalore $\lambda_{1,i}$,i=1,2. Se per assurdo, $0 < \lambda_{1,1} \leq \lambda_{1,2}$ allora per le ipotesi $(-1)^{n-k} \lambda_{1,2} q_2(x) \leq (-1)^{n-k} \lambda_{1,1} q_1(x) \leq 0$ per tutti gli $x \in [a,b]$. Applicando il lemma 15 con $q_2(x) = \lambda_{1,2} q_2(x)$ per tutti gli $x \in [a,b]$ e questo è in contraddizione con la (43) e quindi il teorema è dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 13.

Per ogni intero $m \geq 1$ sia:

(44) $$q_m(x) = p_2(x) - (-1)^{n-k} / m$$

e sia $\beta_{m1}(c)$ il primo autovalore del problema:

$Ly + q_m(x)y = 0$, y soddisfacente le condizioni al contorno (28).

Per il Teorema 14 si ha che se $r < s$ e $c \in (a,b]$, allora:

(45) $$\beta_{r,1}(b) < \beta_{s,1}(c) \; ,$$

mentre per il Lemma 15 e le ipotesi poste si ha:

(46) $$\beta_{m,1}(b) < 1 \; , \; m \geq 1.$$

Poichè $\lim_{c \to a+} \beta_{1,1}(c) = \infty$, esiste c_1 con $a < c_1 < b$ tale che $\beta_{1,1}(c_1)=1$.

Supponiamo che per qualche $r \geq 1$ abbiamo già mostrato l'esistenza di numeri $c_1 < c_2 < \ldots < c_r$ con $a < c_h < b$ tali che $\beta_{h,1}(c_h)=1$ per h=1,...,r.

Per la (45) e la (46) e per la continuità di $\beta_{r+1,1}$ si ha che esiste

c_{r+1}, con $c_r < c_{r+1} < b$, tale che $\beta_{r+1,1}(c_{r+1})=1$. Allora esiste una successione $\{c_m\}_1^\infty$ tale che per tutti gli $m \geq 1$

(47) $a < c_m < b$, $c_m < c_{m+1}$, $\beta_{m,1}(c_m)=1$.

Sia $c=\lim_{m\to\infty} c_m \leq b$. Per la (47) e per la definizione di $\beta_{m,1}$, per ogni $m \geq 1$ esiste una soluzione v_m di

(48) $Lv_m + q_m(x)v_m = 0$,

tale che:

(49) $v_m(x) > 0$, con $x \in (a,c_m)$,

e v_m soddisfacente le condizioni al contorno (28) con $c=c_m$.

Moltiplicando ogni v_m per un'opportuna costante positiva, possiamo assumere che $\sum_{h=0}^{n-1} L_h v_m(a)^2=1$ per ogni m. Per compattezza, esiste una sottosuccessione di $\{v_m\}_1^\infty$ (che per semplicità di notazioni indichiamo ancora con v_m) e dei numeri $d_0,\ldots,d_{n-1}$ tali che $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2=1$ e $\lim_{m\to\infty} L_h v_m(a)=d_h$ per $h=0,\ldots,n-1$. Poichè le funzioni $q_m(x)$ tendono uniformemente a $p_2(x)$ in $[a,b]$, usando un procedimento analogo a quello servito per provare il Lemma 14, è possibile verificare che se indichiamo con v la soluzione di (31) tale che $L_h v(a)=d_h$ per $h=0,\ldots,n-1$, allora:

(50) $\lim_{m\to\infty} L_h v_m(x)=L_h v(x)$ uniformemente in $[a,b]$.

Da quanto visto segue che v è una soluzione non-banale di (31) che verifica le condizioni al contorno (28) in $[a,c]$, quindi per completare la dimostrazione del teorema è sufficiente mostrare che $c < b$.

Supponiamo per assurdo che $c=b$. Se $a < x < b$ allora esiste m tale che $x < c_m$, e così per la (49) e la (50) risulta $v(x) \geq 0$. Dunque:

(51) $(-1)^{n-k}Lv(x)=-(-1)^{n-k}p_2(x)v(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Per il teorema di unicità, gli zeri di v in (a,b) sono isolati. Se $v(x_0)=0$ per qualche $x_0 \in (a,b)$ allora poichè $v(x) \geq 0$, $v'(x_0)=0$. Ma v soddisfa il sistema di condizioni al contorno (28) e quindi per il Lemma 10 si ha che $L_n v=Lv$ cambia di segno almeno due volte in (a,b) e

ciò per la (51) è impossibile. Così se $b=c$, $v(x)>0$ in (a,b).
In virtù del Lemma 15 si ha quindi che $p_1 \equiv p_2$ in $[a,b]$ che contraddice le ipotesi del teorema. Quindi $b>c$ e la prova è completa.

B I B L I O G R A F I A.

[1] S.AHMAD and A.C.LAZER, On n-th order Sturmian theory, J.Differential Equations, 35 (1980), pp.87-112.

[2] S.AHMAD and A.C.LAZER, On an extension of the Sturm comparison theorem, SIAM J.Math.Anal.12 (1981), pp.1-9.

[3] G.J.BUTLER, Hille-Winter type comparison theorems for 2^{nd} order ordinary differential equations, Proc.Amer.Math.Soc.76 (1979).

[4] G.J.BATLER and L.H.ERBE, Integral comparison theorems and extremal points for linear differential equations, J.Differential equations,47 (1983), pp.214-226.

[5] W.COPPEL,"Disconjugacy", Lecture Notes in Mathematics No.20, Springer-Verlag, New York, 1955.

[6] U.ELIAS, The extremal solutions of the equations $Ly+p(x)y=0$, J.Math.Anal.Appl.50 (1975), 447-457.

[7] U.ELIAS, The extremal solutions of the equations $Ly+p(x)y=0$ II, J.Math.Anal.Appl.55 (1976), 253-265.

[8] U.ELIAS, Nonoscillation and eventual disconjugacy, Proc.Amer. Math.Soc.66 (1977), 269-275.

[9] U.ELIAS, Eingenvalue problem for the equations $Ly+\lambda\ p(x)y=0$, J.Differential equations 29 (1978), 28-57.

[10] U.ELIAS, Oscillatory solutions and extremal points for a linear differential equation, Arch.Rational Mech.Anal.70 (1979), pp.177-198.

[11] U.ELIAS, Necessary conditions and sufficient conditions for disfocality and disconjugacy of a linear differential equations, Pacific J.Math.81 (1979), 379-397.

[12] U.ELIAS, Green's functions for a non-disconjugate differential operator, J.Differential equations 37, (1980), pp.318-350.

[13] L.H.ERBE, Hille-Wintner type comparison theorem for self-adjoint fourth order linear differential equations, Proc.Amer,Math.Soc.80 (1980),417-421.

[14] F.GANTMACHER and M.KREIN , Oscillation, Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems,State Publishing House for Technical-Theoretical Literature, Moscow/Leningrad,1950 (Russian)

[15] R.HUNT, Oscillation properties of even order linear differential eq.Trans.Amer.Math.Soc.115(1965), 54-61.

[16] G.W.JOHNSON, The k-th conjugate point function for an even order linear differential equation, Proc.Amer.Math. So. 42 (1974), pp.563-568.

[17] S.KARLIN, Total positivity,interpolation by splines, and Green's functions of differential operators, J.Approximation Theory 4 (1918),I45-154.

[18] M.KREIN, Sur les fonctions de Green non-symétriques oscillatoires des opérateurs différentials ordinaires, C.R.Acad.SCi.URSS 15 (1939) 643-646

[19] M.KREIN, Les théorèmes d'oscillation pour les opèrateurs lineaires différentiels d'ordre quelconque, C.R.(Doklady) Acad.URSS(1939).

[20] W.LEIGHTON and Z.NEHARI, On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equation of fourth order,Trans.Amer. Math.Soc. 89 (1958),325-377.

[21] A.JU.LEVIN,Some problems bearing on the oscillation of solutions of linear differential equations, Dokl.Akad.Nauk SSSR 148 (1963)

[22] A.JU.LEVIN , Distribution of the zeros of solutions of a linear differential equation, Dokl.Akad.Nauk SSSR 156 (1964)

[23] A.JU.LEVIN, Nonoscillation of solutions of the equation $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\dots+p_n(t)x=0$, Uspehi Mat.Nauk.24 (1962),No.2 (146).

[24] Z.NEHARI, Green's functions and disconjugacy,Arch.Rat.Mech.Anal 62

[25] Z.NEHARI, Nonlinear techniques for linear oscillation problems, Trans. Amer. MAth.Soc.210 (1975),387-406

[26] Z.NEHARI, Disconjugate linear differential operators, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1969) ,500-516.

[27] G.POLYA, On the mean value theorem corresponding to a given linear differential equation, Trans.Amer.Math.Soc.24 (1924) 312-324

[28] C.STURM, Sur les équations différentielles du second ordre, J. Math. Pures Appl. 1 (1836);106-185

[29] W.F.TRENCH.,Canonical forms and principle systems for general disconjugate equations, Trans. Amer.Math.Soc.189 (1974), 319-327.

[30] P.HARTMANN,"Ordinary Differential Equations" Wiley, New York, 1964.

[31] J.MIKUSINSKI, Sur l'equation $x^{(n)}+A(t)x=0$, Ann.Polon.Math. 1 (1955), 207-221.

[32] Z.NEHARI, Nonoscillation criteria for nth order linear differential equations, Duke Math.J.32 (1965), 607-616.

[33] F.GANTMACHER, Sur les noyaux de Kellogg non symetriques, C.R.Acad.Sci.URSS 10 (1936), 3-5.

[34] O.KELLOGG,The oscillation of function of an orthogonal set, Amer.J.Math.38 (1916), 1-5.

[35] O.KELLOGG, Orthogonal functions sets arising from integral equations, Amer.J.Math.40 (1918), 145-154.