ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

ATTESTATO DI RICERCA

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

SU ALCUNI RECENTI RISULTATI DI DIFFERENZIABILITA' PER SISTEMI PARABOLICI NON LINEARI E LORO APPLICAZIONI

CANDIDATO:

Roberto Amato

RELATORE:

Prof. Antonino MAUGERI

Anno Accademico 1984/85

TRIESTE

SISSA - SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE STUDI AVANZATI

TRIESTE

Strada Costiera 11

PREMESSA

In un lavoro di prossima pubblicazione su "Le Matematiche" dell'Università di Catania ho dimostrato dei risultati di differenziabilità parziale per una classe di sistemi parabolici quasi lineari del secondo ordine [4]. Recentemente S. Campanato nel lavoro [1] ha dimostrato risultati di differenziabilità locale per sistemi base non lineari del tipo (20).

Tali risultati, in una ricerca in corso, vengono estesi da M. Marino al caso di sistemi non lineari del tipo (5).

Gli stessi risultati di differenziabilità trovano applicazione nella regolarità holderiana delle derivate spaziali delle soluzioni dei sistemi parabolici non lineari [3].

Voglio qui esporre queste nuove tecniche che permettono il conseguimento della differenziabilità locale.

E' il caso di rilevare che i miei suddetti risultati valgono con coefficienti che soddisfano ad una condizione di holderianità per sistemi quasi lineari, mentre i risultati di S. Campanato valgono per sistemi non lineari e con coefficienti in C^1.

SU ALCUNI RECENTI RISULTATI DI DIFFERENZIABILITA' PER SISTEMI PARABOLICI NON LINEARI E LORO APPLICAZIONI

Sia Ω un aperto limitato di R^n $(n > 2)$ con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare. Sia T un numero reale positivo e Q il cilindro $\Omega \times (-T,0)$.

Se $x = (x_1,\dots,x_n)$ è un punto di R^n e $t \in R$, porremo $X = (x,t)$, e se $u : Q \longrightarrow R^N$ (N intero > 1) porremo $Du = (D_1u,\dots,D_nu) \in R^{nN}$. Indicheremo poi con $p = (p^1,\dots,p^n)$, $p^i \in R^N$, un generico vettore di R^{nN}.

Siano $a^i(X,u,p)$, $i=1,\dots,n$ e $B^o(X,u,p)$ vettori di R^N definiti in $\Lambda = Q \times R^N \times R^{nN}$, misurabili in X e continui in (u,p).

In Q prendiamo in esame il seguente sistema del secondo ordine in forma di divergenza

$$(1) \qquad \sum_{i=1} D_i a^i(X,u,Du)+\frac{\partial u}{\partial t} = B^o(X,u,Du)$$

Supponiamo, inoltre, che le applicazioni $p \longrightarrow a^i(X,u,p)$

siano differenziabili con derivate $\partial a_h^i / \partial p_k^j$ misurabili in X, continue in (u,p) e limitate in Λ :

$$(2) \qquad \left\{ \sum_{ij=1} \sum_{hk=1} \left| \frac{\partial a_h^i}{\partial p_k^j} \right|^2 \right\}^{1/2} \leq M \ , \quad \forall (X,u,p) \in \Lambda$$

e che il sistema (1) sia fortemente parabolico, nel senso che esiste $\nu > 0$ tale che

$$(3) \qquad \sum_{ij=1} \sum_{hk=1} \frac{\partial a_h^i(X,u,p)}{\partial p_k^j} \xi_h^i \xi_k^j \geq \nu \|\xi\|^2$$

per ogni $(X,u,p) \in \Lambda$ e per ogni $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in R^{nN}$.

Posto:

$$(4) \qquad \begin{cases} A^i(X,u,p) = a^i(X,u,p) - a^i(X,u,0) \\ B^i(X,u) = -a^i(X,u,0) \end{cases}$$

il sistema (1) si può scrivere

$$(5) \qquad -\sum_{i=1} D_i A^i(X,u,Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1} D_i B^i(X,u) + B^0(X,u,Du)$$

con

$$A^i(X,u,0) = 0$$

in virtù della prima delle (4).

Intendiamo per soluzione del sistema (1) un vettore $u \in L^2(-T,0,H^1(\Omega,R^N)) \cap L^\infty(-T,0,L^2(\Omega))$ e tale che

$$\int_Q \sum_i (a^i(X,u,Du)|D_i\varphi) - (u \mid \frac{\partial\varphi}{\partial t})dX = \int_Q (B^0(X,u,Du)|\varphi)dX$$

$$\forall\varphi \in W(Q) = \{L^2(-T,0,H_0^1(\Omega,R^N)) \cap H^1(-T,0,L^2(\Omega,R^N)) :$$

$$: \varphi(x - T) = \varphi(x,0) = 0\}$$

in Ω. Scriviamo il sistema (5) in forma equivalente.

Con A_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, definiamo in Λ le matrici $N \times N$ come segue:

$$A_{ij} = \{A_{ij}^{hk}\}$$

con

$$A_{ij}^{hk} = \int_0^1 \frac{\partial A_h^i(X,u,\tau p)}{\partial p_k^j} d\tau = \int_0^1 \frac{\partial a_h^i(X,u,\tau p)}{\partial p_k^j} d\tau$$

per cui, grazie al fatto che $A^i(X,u,0) = 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} A_{ij}^{hk}(X,u,p)p_k^j = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial A_h^i(X,u,\tau p)}{\partial p_k^j} p_k^j \, d\tau =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial A_h^i(X,u,\tau p)}{\partial \tau} d\tau = A_h^i(X,u,p)$$

da cui risulta che

$$A^i(X,u,p) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(X,u,p)p^j \tag{7}$$

Pertanto il sistema (5) assume la forma

$$-\sum_{ij=1}^{N} D_i\left[A_{ij}(X,u,Du)\, D_j u\right] + \frac{\partial u}{\partial t} = \tag{8}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} D_i B^i(X,u) + B^0(X,u,Du)$$

Osserviamo che dalla (2) e (7) segue che $\forall (X,u,p)\in\Lambda$

$$\| A^{i}(X,u,p)\| \leq \left\{ \sum_{ij=1}^{m} \sum_{ij=1}^{N} | A^{hk}_{ij}(X,u,p)|^{2} \right\}^{1/2} \|p\|$$

cioè i vettori A^{i} hanno questi "andamenti lineari"

$$\| A^{i}(X,u,p)\| \leq M \|p\| \tag{9}$$

Diciamo che il sistema (8) è quasilineare se

$$A_{ij}(X,u,p) = A_{ij}(X,u)$$

diciamo, invece, che il sistema (8) ha parte principale lineare $E_{o}u = -\sum_{i} D_{i}A^{i}(X,u,Du) + \frac{\partial u}{\partial t}$, se

$$A_{ij}(X,u,p) = A_{ij}(X)$$

Diciamo che il sistema (8) o (5) ha andamenti controllati se i vettori $B^{i}(X,u)$ e $B^{o}(X,u,p)$ hanno i seguenti andamenti polinomiali in u e p

$$\| B^{i}(X,u)\| \leq c(1+\|u\|^{\alpha}) \tag{10}$$

$$\| B^{o}(X,u,p)\| \leq c(1+\|u\|^{\beta} + \|p\|^{\gamma}) \tag{11}$$

$\forall (X,u,p)\in\Lambda$, con

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq \alpha \leq \frac{n+2}{n} \\ 1 \leq \beta \leq \frac{n+4}{n} \\ 1 \leq \gamma \leq \frac{n+4}{n+2} \end{array}\right. \tag{12}$$

Facciamo vedere che questi andamenti permettono di scrivere il sistema in forma variazionale (cioè che gli integrali hanno senso).

Ci sarà utile il seguente Lemma [2]: Se $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$ e $u \in L^q(-\sigma^{2m},0,H^m(B_\sigma,R^N)) \cap L^\infty(-\sigma^{2m},0,L^2(B(\sigma),R^N))$, allora, per ogni intero j con $0 \leq j \leq m-1$, risulta

$$D^\alpha u \in L^{2(n+qm)/(n+2j)}(Q(\sigma),R^N) \quad , \quad \forall \alpha, |\alpha| = j$$

Per tale lemma, nel nostro caso, $\varphi, u \in L^{2(n+2)/n}$

Per verificare che ha senso

$$\left| \int (B^0(X,u,Du)|\varphi) \, dX \right|$$

basta fare vedere che risulta

$$c \int (\|\varphi\| + \|u\|^\beta \|\varphi\| + \|p\|^\gamma \|\varphi\|) \, dX < +\infty$$

in quanto si ha la (11).

Consideriamo

$$\int \|u\|^\beta \|\varphi\| \, dX$$

poichè

$$u \in L^{2(n+2)/n} \Longrightarrow \|u\|^\beta \in L^{2(n+2)/n \cdot 1/\beta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|u\| \in L^{2(n+2)/n \cdot n/(n+4)} \Longrightarrow \|u\| \in L^{2(n+2)/(n+4)}$$

Per essere sommabile dobbiamo avere che, posto

$$\frac{1}{p} = \frac{n+4}{2(n+2)} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{n}{2(n+2)}$$

si abbia

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ed infatti

$$\frac{n+4}{2(n+2)} + \frac{n}{2(n+2)} = 1$$

Ragionando in modo analogo si trattano gli altri termini della (11) e della (10).

Si osserva, per la (4), (9) e (10) che si ha

$$\| a^i(X,u,p) \| \leq \|A^i(X,u,p)\| + \|B^i(X,u)\| \leq M \|p\| + c(1+\|u\|^\alpha)$$

da cui risulta l'andamento delle a^i

$$\| a^i(X,u,p) \| \leq c(M)(1+ \|u\|^\alpha + \|p\|)$$

In particolare diciamo che il sistema (8) o (5) ha andamenti lineari se $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Se in (12) le disuguaglianze di destra valgono in senso stretto gli andamenti si dicono strettamente controllati.

Diciamo, infine, che il sistema (8) o (5) ha andamenti naturali se i vettori $B^i(X,u)$ e $B^o(X,u,p)$ hanno i seguenti andamenti non controllati

$$\|B^i(X,u)\| \leq c(K)$$

$$\|B^o(X,u,p)\| \leq c(K)(1+\|p\|^2)$$

$\forall (X,u,p) \in \Lambda$ con $\|u\| \leq K$

Iniziamo il discorso sulla differenziabilità, così come è svolto da S. Campanato [1].

Se $X^o = (x^o, t_o)$ definiamo

$$B(x^o,\sigma) = B(\sigma) = \left\{ x \in R^n : \|x-x^o\| < \sigma \right\}$$

ed inoltre diremo che $Q(X_o,\sigma) \subset\subset Q$ se

$$B(x^o,\sigma) \subset\subset \Omega \quad \text{e} \quad \sigma^2 < t_o + T \leq T$$

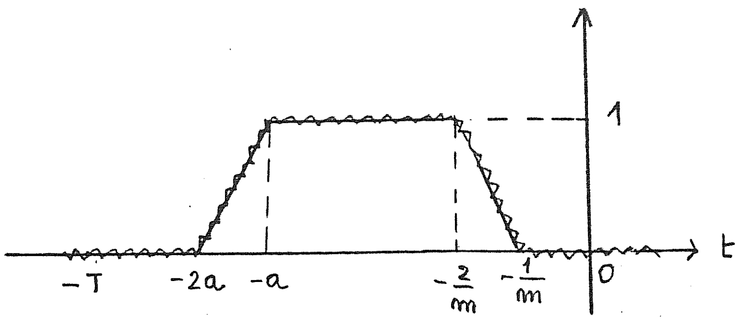
Sia $\theta(x) \in C_o^\infty(R^n)$ una funzione con queste proprietà:

(13) $\quad 0 \leq \theta \leq 1, \ \theta = 1$ in $B(\sigma)$, $\theta = 0$ in $R^n \setminus B(\frac{3}{2}\sigma)$, $\|D\| \leq c\sigma^{-1}$

Sia $\rho_m(t)$, con m intero $> 2/a$ ($2a \in (0,T)$), una funzione definita in R nel seguente modo:

$$(14) \quad \begin{cases} \rho_m(t) = 1 & \text{se } -a \leq t \leq -\frac{2}{m} \\ \rho_m(t) = 0 & \text{se } t > -\frac{1}{m} \text{ o } t < -2a \\ \rho_m(t) = \frac{t}{a} + 2 & \text{se } -2a \leq t \leq -a \\ \rho_m(t) = -(mt+1) & \text{se } -\frac{2}{m} \leq t \leq -\frac{1}{m} \end{cases}$$

cioè, come in figura



Sia, infine, $\{g_s(t)\}$ una successione di regolarizzanti simmetriche a supporto compatto in R:

$$(15)\qquad \begin{cases} g_s(t) \in C_0^\infty(R) \ , \quad g_s(t) \geq 0 \ , \ g_s(t) = g_s(-t) \\ \text{supp } g_s(t) \subset \left[-\frac{1}{s} \ , \ \frac{1}{s}\right] \\ \quad g_s(t)dt = 1 \end{cases}$$

a tali funzioni si da il nome di regolarizzatori di Friedrichs o di mollificatori.

Ricordiamo, a riguardo della (15), che se una funzione è pari la sua derivata è dispari e che quindi

$$(16)\qquad \int_{-c}^{c} g_s'(t)dt = 0$$

Definiamo

$$(17)\qquad \tau_{r,h}\, u(x) = u(x+he^r,t) - u(X)$$

dove $\{e^r\}_{r=1,\dots,n}$ è la base canonica di R^n ed

(18) $$|h| < \frac{\sigma}{2}$$

Riportiamo, ora, due Lemmi che risulteranno essere utili nel seguito.

Lemma 1. [Q]. Se $u \in H^{1,p}(B(\sigma), R^N)$, $p \geq 1$, $l \in (0,1)$ e $|h| < (1-l)\sigma$ si ha che

$$\|\tau_{r,h}\, u\|_{p,B(l\sigma)} \leq \|Du\|_{p,B(\sigma)}$$

Infatti, per la (17),

$$\tau_{r,h}\, u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dl}\, u(x+lhe^r)\,dl = h\int_0^1 Du(x+lhe^r)\,dl$$

per cui

$$\int_{B(l\sigma)} \|\tau_{r,h}\, u\|^p\, dx \leq |h| \int_0^1 dl \int_{B(l\sigma)} \|Du(x+lhe^r)\|^p\, dx \leq$$

$$\leq |h| \int_{B(\sigma)} \|Du\|^p\, dx$$

Lemma 2. [Q]. Se $u \in L^p(B(\sigma), R^N)$, $1 < p < +\infty$, ed esiste $S > 0$ tale che $\forall |h| < (1-l)\sigma$

$$\frac{1}{|h|}\, \|\tau_{r,h}\, u\|_{p,B(l\sigma)} \leq S$$

allora $u \in H^{1,p}(B(\sigma), R^N)$ e

$$\| D_i u \|_{p,B(1\sigma)} \leq S$$

Dopo tali premesse, ci interessiamo di risultati di locale differenziabilità in Q per le soluzioni distribuzione $u \in L^2(-T,0,H^1(\Omega,R^N))$ di sistemi base, cioè di sistemi del tipo (5) con $A^i(X,u,p) = A^i(p)$, $B^i(X,u)=0$, $B^o(X,u,p)=0$.

Teorema [1]. Se $u \in L^2(-T,0,H^1(\Omega,R^N))$ è una soluzione in Q del sistema

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i A^i(Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

nel senso, come già detto, che

$$\int_Q \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a^i(Du) | D_i \varphi) - (u | \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \right\} dX = 0 \tag{20}$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(Q,R^N)$ allora esistono:

$$D_{ij} u \in L^2_{loc}(Q) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2_{loc}(Q) \tag{21}$$

e $\forall B(x^0, 2\sigma) \subset\subset Q$, $\forall 2a \in (0,T)$

$$\int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \sum_{ij} \| D_{ij} u \|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dx \leq \tag{22}$$

$$\leq c(\nu,M)\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{a}\right) \int_{-2a}^{0} dt \int_{B(2\sigma)} \| Du \|^2 dx$$

Dimostrazione:

Poichè la (20) è valida per le φ date nella (6), per ogni $m > 2/a$ e $\forall s > \max\left\{ m, \frac{1}{T-2a} \right\}$, possiamo assumere nella (20)

(23) $$\varphi = \tau_{r,-h}\left\{\theta^2 \rho_m \left[(\rho_m \tau_{r,h} u) * g_s\right]\right\}$$

ottenendo

(23') $$\int_Q \sum_i (a^i(Du) | D_i\varphi) dX =$$

$$= \int_Q \sum_i (a^i(Du) | D_i \left\{\tau_{r,-h} \left[\theta^2 \rho_m (\rho_m \tau_{r,h} u) * g_s\right]\right\}) dX =$$

$$= \int_{R^n \times]-\infty,+\infty[} \sum_i (a^i(Du) | D_i \left\{\tau_{r,-h} \left[\theta^2 \rho_m (\rho_m \tau_{r,h} u) * g_s\right]\right\}) dX$$

Poniamo:

$$\theta^2 \rho_m(\rho_m \tau_{r,h} u) * g_s = V$$

e scriviamo la (23') in un modo differente a noi più utile

(24) $$\int_{R^n \times]-\infty,+\infty[} \sum_i (a^i(Du) | D_i \left[V(x-he^r,t) - V(x,t)\right]) dX =$$

$$= \int_{R^n \times]-\infty,+\infty[} \sum_i (a^i(Du) | D_i V(x-he^r,t)) dX - \int_{R^n \times]-\infty,+\infty[} \sum_i (a^i(Du) | D_i V(x,t) dX$$

Facciamo un cambiamento di variabile nel primo termi ne del secondo membro ponendo

$$x - he^r = y \Longrightarrow x = y + he^r \quad , \quad dX = dY$$

per cui richiamando con la x la variabile y la (24) di viene

$$\text{(25)} \qquad \int_{R^n \times]-\infty,+\infty[} \sum_i (a^i(Du(x+he^r)) | D_i V(x))dX -$$

$$- \int_{R^n \times]-\infty,+\infty[} \sum_i (a^i(Du(x)) | D_i V(x))dX =$$

$$= \int_Q \sum_i (\tau_{r,h}\, a^i(Du) | D_i \{ \theta^2 \rho_m\, \tau_{r,h}\, u) * g_s]\}) dX$$

ricordando che fuori di $3\sigma/2$ l'integrale si annulla.

A riguardo del secondo termine della (20) si ha

$$\int_Q (u | \frac{\partial \varphi}{\partial t}) dX = \int_Q (u | \frac{\partial}{\partial t}\, \tau_{r,-h} \{ \theta^2 \rho_m [(\rho_m\, \tau_{r,h}\, u) *$$

$$* g_s]\}) dX$$

e con metodo analogo a quello precedente si ottiene

$$\text{(26)} \qquad \int_Q (u | \frac{\partial \varphi}{\partial t}) dX =$$

$$= \int_Q (\tau_{r,h}\, u \,|\, \theta^2 \{ \rho_m [(\rho_m\, \tau_{r,h}\, u) * g_s] \}')\, dX$$

Poniamo:

$$A_{ij} = \left\{ A_{ij}^{hk} \right\} \quad \text{con} \quad A_{ij}^{hk} = \int_0^1 \frac{\partial a_h^i}{\partial p_k^j}(Du + \eta\, \tau_{r,h}\, Du)\, d\eta$$

Da cui

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} A_{ij}^{hk}\ \tau_{r,h}\, D_j u_k =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a_h^i}{\partial p_k^j}(Du + \eta\, \tau_{r,h}\, Du)\, \tau_{r,h}\, D_j u_k\, d\eta =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial a_h^i}{\partial \eta}(Du + \eta\, \tau_{r,h}\, Du)\, d\eta =$$

$$= a_h^i(Du + \tau_{r,h}\, Du) - a_h^i(Du) =$$

$$= a_h^i(Du(x+he^r, t) - a_h^i(Du(x,t) = \tau_{r,h}\, a_h^i(Du)$$

e si ricava

$$\tau_{r,h}\, a^i(Du) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ \tau_{r,h}\, D_j u \tag{27}$$

Intanto, per la (16), osserviamo che

$$\int_Q (\tau_{r,h}\, u \,|\, \theta^2 \rho_m [(\rho_m\, \tau_{r,h}\, u) * g_s]')\, dX = 0 \tag{28}$$

Dalla (25),(26) e (28), possiamo riscrivere la (20):

$$(29)\qquad \int_Q \theta^2 \rho_m \sum_{ij} (A_{ij}\, \tau_{r,h}\, D_j u | (\rho_m\, \tau_{r,h}\, D_i u) * g_s))dX =$$

$$= -2\int_Q \theta \rho_m \sum_{ij} (A_{ij}\, \tau_{r,h}\, D_j u | D_i\theta [(\rho_m\, \tau_{r,h}\, u) * g_s])dX +$$

$$+ \int_Q \theta^2 \rho'_m\, (\tau_{r,h}\, u \,|\, \rho_m\, \tau_{r,h}\, u) * g_s)dX$$

Dalle proprietà delle funzioni mollificatori $g_s(t)$ [5] è noto che se $s \to +\infty$, allora

$$(\rho_m\, \tau_{r,h}\, u) * g_s \to \rho_m\, \tau_{r,h}\, u \quad \text{in} \quad L^2(-T,0,H^1(\Omega,R^N))$$

pertanto dalla (29), considerando il limite per $s \to +\infty$ otteniamo:

$$(30)\qquad A = \int_Q \theta^2 \rho_m^2 \sum_{ij} (A_{ij}\, \tau_{r,h}\, D_j u \,|\, \tau_{r,h}\, D_i u)dX =$$

$$-2\int_Q \theta \rho_m^2 \sum_{ij} (A_{ij}\, \tau_{r,h}\, D_j u | D_i\theta\, \tau_{r,h}\, u)dX +$$

$$+ \int_Q \theta^2\, \rho_m\, \rho'_m\, \| \tau_{r,h}\, u \|^2 dX = B + C$$

Dalla (3), si ha

$$A \geq \nu \int_Q \theta^2 \rho_m^2\, \| \tau_{r,h}\, Du \|^2 dX$$

e, per la (2), applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha per ogni $\varepsilon>0$

$$(31) \qquad |B|\leq\varepsilon\int\theta^2\,\rho_m^2\,\|\zeta_{r,h}\,Du\|^2\,dX$$

$$+\,c(\varepsilon,M)\int_Q\|D\theta\|^2\,\rho_m^2\,\|\zeta_{r,h}\,u\|^2\,dX$$

Infine, poichè dalle (14) risulta che

$$\rho_m\,\rho_m'\begin{cases}\leq 0 & \text{per} \quad t\geq-\dfrac{2}{m}\\ =0 & \text{per} \quad t\leq 2a \quad \text{e per} \quad -a\leq t\leq-\dfrac{2}{m}\\ \leq\dfrac{1}{a} & \text{per} \quad -2a\leq t\leq -a\end{cases}$$

tenendo conto delle (13) si ha

$$(32) \qquad C\leq\frac{c}{a}\int_{-2a}^{-a}dt\int_{B(3\sigma/2)}\|\zeta_{r,h}\,u\|^2\,dx$$

Dal confronto della (30), (31) e (32), per $\varepsilon=\dfrac{\nu}{2}$ e per le (13) si ricava

$$(33) \qquad \int_{-a}^{-2/m}dt\int_{B(\sigma)}\|\zeta_{r,h}\,Du\|^2\,dx\leq$$

$$\leq c(\nu,M)\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{a}\right)\int_{-2a}^{0}dt\int_{B(3\sigma/2)}\|\zeta_{r,h}\,u\|^2\,dx$$

e per il Lemma 1 segue

$$(34) \qquad c(\nu,M)\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{a}\right)\int_{-2a}^{0} dt \int_{B(3\sigma/2)} \|\zeta_{r,t}\, u\|^2\, dx \leq$$

$$\leq c(\nu,M)\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{a}\right)|h|^2\int_{-2a}^{0} dt \int_{B(2\sigma)} \|Du\|^2\, dx$$

Considerando il limite per $m \to +\infty$ nella (33), con la (34) si ottiene

$$(35) \qquad \int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \|\zeta_{r,h}\, Du\|^2\, dx \leq$$

$$\leq c(\nu,M)\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{a}\right)|h|^2\int_{-2a}^{0} dt \int_{B(2\sigma)} \|Du\|^2\, dx$$

Facendo ora uso del Lemma 2 segue

$$(36) \qquad \int_{-a} dt \int_{B(\sigma)} \sum_{ij} \|D_{ij}u\|^2\, dx \leq$$

$$\leq c(\nu,M)\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{a}\right)\int_{-2a}^{0} dt \int_{B(2\sigma)} \|Du\|^2 dx$$

da cui si conclude che esiste $D_r Du \in L^2(B(\sigma)\times(-a,0)$, $r=1,2,\ldots,n$ e vale la maggiorazione (36).

Da questo risultato si può facilmente ricavare che

$$(37) \qquad \exists\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(B(\sigma) \times (-a,0)$$

infatti dalla (20) segue che $\forall \varphi \in C_0^\infty(B(\sigma)\times(-a,0)$

$$(38) \qquad \int_{a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \left(u \,\middle|\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) dx =$$

$$= \int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \sum_{i=1} (A^i(Du) | D_i \varphi) dx =$$

$$= - \int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} (\sum_i D_i a^i(Du) | \varphi) dx$$

e poichè

$$\sum_i D_i a^i(Du) = \sum_{ij} \sum_k D_{ij} u_k \frac{\partial a^i(Du)}{\partial p_k^j}$$

dalla (2) e (36) si ottiene la (37).

Infine dalla (2), (38) e (36) si ricava immediatamente

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(B(\sigma) \times (-a,0))} = \left\| \sum D_i A^i(Du) \right\|^2_{L^2(B(\sigma) \times (-a,0))} =$$

$$= \left\| \sum_{ij=1} \sum_{k=1} \frac{\partial a^i(Du)}{\partial p_k^j} D_{ij} u_k \right\|_{L^2(B(\sigma) \times (-a,0)} \leq$$

$$\leq M \int_a^0 dt \int_{B(\sigma)} \sum_{ij} \| D_{ij} u_k \|^2 dx \leq$$

$$\leq c(\nu, M) \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{a} \right) \int_{-2a}^{0} dt \int_{B(2\sigma)} \| Du \|^2 dx$$

da cui con la (36) segue la (22).

Se passiamo adesso dal sistema base (19) al sistema (5) ed applichiamo a quest'ultimo la precedente tecnica, è ancora possibile ricavare, difficoltà tecniche a parte, un risultato di locale differenziabilità.

Si dimostra cioè il seguente

Teorema 2. Se $u \in L^2(-T,0,H^1(\Omega,R^N)) \cap L\ (-T,0,L^2(\Omega,R^N))$ è soluzione del sistema (5) e se

$$a^i \in C^1(\bar{Q} \times R^N \times R^{nN}) \ , \ i=1,2,\dots,n$$

$$\left\| \frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} \right\| + \left\| \frac{\partial a^i}{\partial u_k} \right\| \leq M$$

$$\left\| \frac{\partial a^i}{\partial x_r} \right\| + \| B^o \| \leq c(1 + \| u \|^{\alpha} + \| p \|)$$

allora esistono

$$D_{ij} u \in L^2_{loc}(Q,R^N) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2_{loc}(Q,R^N)$$

e $\forall B(x^o, 2\sigma) \subset\subset \Omega, \sigma \leq 1, \forall 2a \in (0,T)$

$$\int_{-a}^{0} dt \int_{B(x^o, \ )} \Big(\sum_{ij=1} \|D_{ij}u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2\Big) dx \leq$$

$$\leq c(\nu,M)\Big(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{a}\Big) \int_{-2a}^{0} dt \int_{B(x^o,2\sigma)} \|Du\|^2 \, dx \, +$$

$$+ \ c(\nu) \int_{-2a} dt \int_{B(x^o,2\sigma)} (1 + \| u \|^{2(n+2)/n}) dx$$

Questo risultato è ben noto per i sistemi ellittici (cfr. ad es. [Q]); per i sistemi parabolici non mi risulta sia stato trattato, in forma completa, in precedenza, e per ora se ne sta occupando M. Marino dell'Università di Catania.

Se il sistema parabolico (5) ha andamenti naturali la tecnica ora illustrata non sembra prestarsi a stabilire risultati di locale differenziabilità.

I risultati di differenziabilità ora enunciati, oltre ad essere interessanti in sè, costituiscono, come è noto, il punto di partenza per lo studio della holderianità parziale delle derivate spaziali $D_i u$ delle soluzioni.

Accenniamo brevemente a ciò nel caso di sistemi ad andamenti naturali.

Il sistema (5) che soddisfa alle ipotesi (2) e (3) con i vettori A^i e $B^i \in C^1(\bar{Q} \times R^N \times R^{nN})$ e le

$$\|a^i\| + \sum_{s=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial x_s} \right\| + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial a^i}{\partial u_k} \right\| \leq \tag{25}$$

$$\leq M(1 + \sum_{j=}^{n} \|p^j\|) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

e $\forall (X, u, p) \in \bar{Q} \times R^N \times R^{nN}$ risulta

$$\| B^o(X,u,p)\| \leq g^o(X) + M \sum_{j=1}^{n} \| p^j \|^2$$

con $g^o(X) \in L^p(Q)$, $p > n+2$

si dice ad andamenti quadratici e per soluzione di tale sistema si intende che $u \in L^2(-T,0,H^2(\Omega,R^N)) \cap H^1(-T,$ $0,L^2(\Omega,R^N)) \cap C^{0,\gamma}(\bar{Q},R^N)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $\forall \varphi \in C_o(Q,R^N)$, nel senso che

$$(26) \qquad \int_Q \left\{ \sum_{i=1} a^i(X,u,Du) | D_i\varphi) - (u | \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \right\} dX =$$

$$= \int_Q (B^o(X,u,Du)|\varphi)dX \ , \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(Q,R^N)$$

Fissato un intero s, $1 \leq s \leq n$, poniamo:

$$\varphi = D_s v^s \qquad \text{con} \quad v^s \in C_o^\infty(Q,R^N) ;$$

per cui la (26) diventa, applicando Gauss-Green

$$(27) \qquad \int_Q \left\{ -\sum_{i=1}^{n} (D_s a^i(X,u,Du) | D_i v^s) + (D_s u \mid \frac{\partial v^s}{\partial t}) \right\} dX =$$

$$\int_Q \sum_{i=1} (\delta_{is} B^o(X,u,Du)| D_i v^s)dX \ , \quad \forall v^s \in C_o^\infty(Q,R^N)$$

e poichè

$$D_s a^i(X,u,Du) = \frac{\partial a^i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a^i}{\partial u_k} D_s u_k + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} \frac{a^i}{p_k^j} D_{js} u_k$$

$i = 1,\dots,n$,

dove

$$D_{js} u_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_s} , \quad k=1,\dots,N ; \quad D_{js} u = (D_{js} u_1,\dots,D_{js} u_N)$$

possiamo scrivere la (27) nel seguente modo

$$(28) \quad \int_Q \left\{ \sum_{i,j=1}^{m} (A_{ij}(X,u,Du) D_{js} u | D_i v^s) - (D_s u \mid \frac{\partial v^s}{\partial t}) \right\} dX =$$

$$= \int_Q \sum_{i=1}^{m} (F^{i,s}(X,u,Du) | D_i v^s) dX , \quad \forall v^s \in C_0^\infty(Q,R^N)$$

$s = 1,\dots,n$,

dove

$$A_{ij} = \left\{ A_{ij}^{hk} \right\} , \qquad A_{ij}^{hk} = \frac{\partial a_h^i}{\partial p_k^j}$$

$$F^{i,s}(X,u,Du) = - \frac{\partial a^i}{\partial x_s} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a^i}{\partial u_k} D_s u_k - \delta_{is} B^o .$$

Se ora nella (28) sommiamo rispetto ad s e poniamo

$U = Du$ si ottiene che $U \in L^2(-T,0,H^1(\Omega,R^N))$ e verifica

$$(29)\quad \int_Q \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} (\mathcal{A}_{ij}(X,u,U)\, D_j U \mid D_i \Phi) - (U \mid \frac{\partial \Phi}{\partial t}) \right\} dX =$$
$$\int_Q \sum_{i=1}^{n} (F^i(X,u,U) \mid D_i \Phi)\, dX \ , \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(Q,R^{nN})$$

dove $\mathcal{A}_{ij}$, $i,j = 1,2,\dots,n$, è la seguente matrice $nN \times nN$

$$\mathcal{A}_{ij} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} A_{ij} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{ij} \end{array} \right\}$$

e le F^i, $i = 1,2,\dots,n$, sono vettori di R^{nN} le cui componenti sono

$$F^i = (F^{i,1} \mid F^{i,2} \mid \dots \mid F^{i,n})$$

Osserviamo che il sistema (29) è anche fortemente parabolico. Infatti, per ogni sistema

$\{\eta^i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\eta^i = (\eta^{i,1} \mid \eta^{i,2} \mid \dots \mid \eta^{i,n})$, $\eta^{i,s} \in R^N$, di vettori di R^{nN} abbiamo

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\mathcal{A}_{ij}\eta^j \mid \eta^i) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} (A_{ij}\eta^{j,s} \mid \eta^{i,s}) =$$

$$= \sum_{i\,j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} \frac{\partial a_h^i}{\partial p_k^j} \eta_k^{j,s} \cdot \eta_h^{i,s} \geq \nu \sum_{i=1} \| \eta^i \|^2$$

Ed inoltre le matrici $\mathcal{A}_{ij}$ sono limitate ed uniformemente continue in $\bar{Q} \times R^N \times R^{nN}$ se lo sono le derivate

$$\frac{\partial a^i}{\partial p_k^j} \;, \quad i,j = 1,2,\dots,n \;, \quad k = 1,2,\dots,N$$

Abbiamo cosi ottenuto che se supponiamo di aver dimostrato, in qualche ipotesi che esistono

$$D_{ij}u \in L^2_{loc}(Q,R^N) \;, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2_{loc}(Q,R^N)$$

allora lo studio della holderianità parziale in Q delle derivate spaziali delle soluzioni u del sistema (5) è dunque ricondotto allo studio della holderianità parziale in Q delle soluzioni U del sistema (29), studio che si può affrontare facendo uso della teoria di regolari tà di S. Campanato.

Lo studio della holderianità parziale in Q delle derivate spaziali $D_i u$ delle soluzioni u del sistema (5) passa dunque attraverso i due seguenti punti:

a) differenziabilità locale per le soluzioni u del sistema (5);

b) holderianità parziale per le soluzioni U del sistema (29).

Per andamenti controllati il punto a) è risolto dal teorema 2, resta aperto il punto b) che è in fase di studio da M. Marino e L. Fattorusso; per andamenti non controllati è invece aperto il punto a), mentre il punto b) è stato recentemente risolto in [3].

BIBLIOGRAFIA

Q - S. CAMPANATO : Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarità all'interno., Quaderni della Scuola Normale Superiore, PISA-1980.

- S. CAMPANATO : On the Nonlinear Parabolic Systems in Divergence Form. Hölder Continuity and Partial Hölder Continuity of the Solutions., Ann. Mat. Pura e Appl., (IV), Vol. CXXXVII, pp. 83 - 122, 1984.

2 - M. MARINO - A. MAUGERI : L^p Theory and Partial Hölder Continuity for Quasilinear Parabolic Systems of Higher Order with Strictly Controlled Growth., Ann. Mat. pura e Appl., (IV), Vol. CXXXIX, pp. 107 - 146, 1985.

3 - M. MARINO - A. MAUGERI : Partial Hölder Conti Continuity of the Spatial Derivatives of the Solutions to Nonlinear Parabolic Systems with Quadratic Growth.,(In corso di stampa).

4 - R. AMATO : Alcuni risultati di regolarità per una classe di sistemi parabolici quasi lineari del secondo ordine.,(In corso di stampa su " Le Matematiche " dell'Università di Catania).

5 - C. MIRANDA : Istituzioni di Analisi Funzionale lineare., Vol.I, U.M.I., 1978.