ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

PROBLEMI ELLITTICI SU $\mathbb{R}^N$

CANDIDATO:

Dott. Carlo Greco

RELATORE:

Prof. Antonio Ambrosetti

Anno Accademico 1982/1983

TRIESTE

SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI

TRIESTE

TESI PER IL DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

PROBLEMI ELLITTICI SU $\mathbb{R}^N$

Settore: Analisi funzionale e applicazioni

Relatore: Prof. A. Ambrosetti

Candidato: dott. C. Greco

Anno Accademico 1982/83

Indice.

§0. Introduzione.

In questi ultimi anni,ad opera di autori quali [27], [5], [6], [28], ha ricevuto grande impulso lo studio di equazioni ellittiche semilineari autonome del tipo:

(0.1) $\quad -\Delta u=g(u) \quad$ in $\mathbb{R}^N$

ove $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é una funzione continua e dispari(quindi $g(0)=0$) e alla soluzione u si impone una condizione omogenea all'infinito:

(0.2) $\quad \lim_{|x|\to\infty} u(x)=0.$

A parte l'interesse puramente matematico di tali problemi(che sono l'analogo,in $\mathbb{R}^N$,del problema di Dirichelet omogeneo in un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$),il loro studio é fortemente motivato sia da questioni di natura fisica,che da problemi di tipo biomatematico: [12], [13], [15], [14].

Ad esempio,la ricerca di onde progressive,cioé di soluzioni della forma $\Phi(t,x)=u(x-ct)$ (con $|c|<1$) di un'equazione non lineare di tipo Klein-Gordon:

(0.3) $\quad \Phi_{tt}-\Delta\Phi+a^2\Phi = f(\Phi)$

conduce ad un'equazione che,a meno di un cambiamento di variabili,è del tipo (0.1);e così pure la ricerca di onde stazionarie $\Phi(x,t)=\exp(i\vartheta t)u(x)$, con $\vartheta\in\mathbb{R}$,purché la funzione f verifichi la condizione di simmetria:

(0.4) $\quad f(\varrho\exp(i\vartheta))=f(\varrho)\exp(i\vartheta) \quad (\varrho,\vartheta\in\mathbb{R}).$

Ancora,la ricerca di stati stazionari,cioé di soluzioni del tipo $\Phi(x,t)=\exp(-imt)u(x)$ $(m\in\mathbb{R})$ dell'equazione di Schröedinger

(0.5) $\quad i\Phi_t-\Delta\Phi= f(\Phi)$

ove f verifica ancora la condizione di simmetria (0.4),porta ad un'equazione dello stesso tipo.

Infine problemi di biomatematica conducono alla ricerca di stati stazionari per l'equazione

(0.6) $\quad \psi_t-\Delta\psi= g(\psi),$

che non sono altro che soluzioni di equazioni tipo (0.1): [13], [14].

In tutti i casi,la condizione (0.2) di convergenza a zero all'infinito della soluzione garantisce la limitatezza delle grandezze fisiche in gioco.

Nello studio dell'equazione (0.1) ha particolare interesse la ricerca di soluzioni (ovviamente non banali,come sarà sempre sottointeso nel seguito) radialmente simmetriche $:u(x)=u(|x|)$;ciò sia per il loro significato fisico,sia perché almeno le soluzioni positive (purché la funzione g sia sufficientemente regolare) sono radialmente simmetriche (cfr.Gidas-Ni-Niremberg [16]).Almeno tre diversi metodi si possono adottare per la ricerca di tali soluzioni simmetriche:

-il metodo dell'equazione differenziale ordinaria associata a (0.1)

-il metodo locale

-il metodo variazionale

Il metodo dell'equazione differenziale ordinaria consiste nell'osservare che una soluzione radialmente simmetrica u di (0.1)-(0.2), vista come funzione di una sola variabile, deve soddisfare il problema

$$(0.7)\qquad \begin{cases} u''(r)+\frac{N-1}{r}u'(r)+g(u(r))=0 & (r>0) \\ u'(0)=0 \\ u(\infty)=0 \end{cases}$$

e viceversa, le soluzioni di (0.7), estese radialmente ad $\mathbb{R}^N$, verificano le (0.1)-(0.2). Nel caso delle soluzioni positive, si ottengono così risultati di esistenza con dimostrazioni relativamente elementari, ed è possibile trattare anche il caso non autonomo (cioé quando g dipende anche da $x\in\mathbb{R}^N$) ed il caso "supercritico", cioé quando g cresce molto velocemente all'infinito (cfr. Ber.Li.Pe. [6]). Infine, lo studio diretto del problema (0.7) ha consentito di recente (cfr. [21], [19]) di fornire risultati di unicità, sempre per le soluzioni positive di (0.1)-(0.2). Alcuni di questi risultati verranno rapidamente esposti nel §1 seguente.

Il metodo locale consiste nell'approssimare il problema dato con problemi di Dirichelet omogenei assegnati sulla sfera $B_R=\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x|<R\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u_R = g(u_R) & \text{in } B_R \\ u_R = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

Questo metodo, pur essendo forse il più naturale approccio ai problemi in tutto $\mathbb{R}^N$, richiede alcune restrizioni di carattere tecnico sulla funzione g, e presenta la non semplice difficoltà di dimostrare la convergenza di una successione $(u_{R_n})_n$ di soluzioni approssimate verso una soluzione della equazione (0.1); esso è stato sviluppato in [4] ma, per brevità, qui non se ne parlerà ulteriomente.

Volendo studiare l'equazione (0.1) col metodo variazionale, conviene ambientare il problema nello spazio

$$H^1_r = H^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap\{u \mid u(x)=u(|x|)\}$$

($H^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ è lo spazio di Sobolev delle funzioni di $L^2(\mathbb{R}^N)$ con derivata debole in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e con la consueta norma $|u|^2_{H^1}=|u|^2_{L^2}+|\nabla u|^2_{L^2}$). Introdotto allora il funzionale S su H^1_r :

$$S(u)=\tfrac{1}{2}T(u)-V(u)$$

ove

$$T(u)=\int|\nabla u|^2$$

$$V(u)=\int G(u)\ , \quad \text{con } G'=g \quad (°),$$

la ricerca di soluzioni deboli di (0.1)-(0.2) viene ricondotta allo studio dei punti critici di S. Poiché però S è fortemente indefinito (cioé illimitato superiormente e inferiormente in H^1_r, Berestycki e Lions in [5], sulle tracce di un precedente lavoro di Coleman-Glazer-Martin [9], studiano il funzionale S sulla varietà:

(°) Quando non è indicato diversamente, tutti gli integrali si intendono estesi ad $\mathbb{R}^N$.

$$M = \{u \in H^1_r \mid T(u) = 1\},$$

che non è altro che la traccia su H^1_r della superficie sferica unitaria dello spazio di Hilbert $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ (=completamento di $\mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ per la norma $|u|^2_{H^1_0} = \int |\nabla u|^2$).Utilizzando a questo punto un risultato di compattezza dovuto a Strauss [27],si dimostra per $V_{|M}$ una condizione tipo Palais-Smale.La classica teoria di Ljusternik-Schnirelmann non è tuttavia applicabile a questa situazione,sia perché M non è la sfera unitaria di$(H^1_r , |\cdot|_{H^1})$,sia perché non è possibile lavorare direttamente in $H^1_0(R^N)$,non essendo V differenziabile in tale spazio.La variante proposta da Berestycki e Lions,qui esposta al §3,consente invece di dimostrare l'esistenza di infinite soluzioni del problema.

Più recentemente Struwe [28] ha elaborato una differente generalizzazione della teoria dei punti critici che consente di studiare direttamente funzionali che,pur non essendo Fréchet-differenziabili nel loro dominio di definizione,lo sono parzialmente,cioé in opportune direzioni.Questa teoria,che fornisce una semplice ed elegante dimostrazione dei risultati di Berestycki e Lions,è esposta nel §4.

Infine,una menzione a parte meritano i casi N=1 ed N=2.Il caso N=1 è trattato con metodi elementari in [5] ;il caso N=2 è stato recentemente studiato da Berestycki-Gallouet-Kavian (cfr.bibliogr.di [5]).

Per ragioni di brevità questi risultati non verranno esposti qui,e anzi,d'ora in poi,si supporrà prevalentemente $N \geq 3$.

§1.

La ricerca delle soluzioni radialmente simmetriche dell'eq. (0.1) è stata affrontata dapprima in casi particolari,correlati a problemi di fisica matematica (alcune notizie al riguardo si possono trovare in una lunga memoria di Sansone [26] che risale al 1970).Ad esempio,in [15] si studia l'equazione:

(1.1) $$-\Delta u = -u+u^3 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

e si asserisce che,per ogni $n \geq 1$,esiste almeno una soluzione u_n ,di classe $\mathscr{C}^2$,radialmente simmetrica,che si annulla esattamente n-1 volte e decade esponenzialmente all'infinito.Più tardi,in [29],Synge,pur senza dimostrarne l'esistenza,fornisce un procedimento di approssimazione numerica per la soluzione positiva di $-\Delta u = -u+u^2$.La prima dimostrazione rigorosa dell'esistenza di una soluzione positiva di (1.1) si deve a Nehari [20],e poco dopo Ryder [25] dimostra l'esistenza delle soluzioni u_n con $n\geq 1$ anche nel caso più generale:

(1.2) $$-\Delta u = -u+uf(u^2) \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

(con opportune ipotesi sulla funzione f).Adoperando la categoria di Ljusternik-Schnirelmann,Berger [7] ha dimostrato l'esistenza di infinite soluzioni per l'equazione:

(1.3) $$-\Delta u = -mu+\lambda|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

con $m>0$, $\lambda\geq 0$ e $1<p<5$,mentre la più generale equazione

(1.4) $$-\Delta u = -mu+\lambda|u|^{p-1}u-\mu|u|^{q-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

è stata studiata da Anderson-Derrick [1] nel caso $m=\lambda=1,p=3,q=5,N=3$.

Il primo studio di carattere generale dell'eq.(0.1) si deve invece a Strauss [27] che ha dimostrato,fra l'altro,un interessante risultato di compattezza,qui esposto al §2 e adoperato correntemente nel seguito.

Lasciando per ora da parte i risultati che si possono ottenere studiando direttamente l'eq.(0.1) con metodi variazionali (cfr.§3 e §4),si esporranno ora alcuni teoremi riguardanti l'esistenza e l'unicità delle soluzioni positive e radialmente simmetriche del problema (0.1)-(0.2) (sotto varie ipotesi per la funzione g),recentemente ottenuti da [6],[21],[19] con metodi elementari correlati alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie.Tutti i risultati verranno enunciati nel caso $N\geq 3$,benché alcuni possano essere facilmente estesi al caso N=2.Per le dimostrazioni ed ulteriori dettagli,si rinvia ai lavori originali.

Sia $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana,con $g(0)=0$ tale che:

(1.5) esiste $\alpha=\inf\{\zeta>0 \mid g(\zeta)\geq 0\}$ e $\alpha>0$

(1.6) esiste $\zeta_0=\inf\{\zeta>0 \mid G(\zeta)=\int_0^\zeta g(s)ds>0\}$ $(\zeta_0>\alpha)$

(1.7) $$\lim_{s\to\alpha^+}\frac{g(s)}{s-\alpha}>0$$

(1.8) $g(s) > 0$ per $s \in (\alpha, \zeta_0]$.

Posto infine

$$\beta = \inf\{\zeta > \zeta_0 \mid g(\zeta) = 0\}, \quad \beta = +\infty \text{ se } \{\ldots\} = \emptyset \quad (\zeta_0 < \beta \leq +\infty),$$

si supponga che:

(1.9) se $\beta = +\infty$, allora $\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{\ell}} = 0$ per qualche $\ell < \frac{N+2}{N-2}$.

Ad esempio, la funzione $g(s) = -s + s^3$ verifica tutte le ipotesi precedenti con N=3. Il principale risultato di esistenza è espresso dal seguente teorema (cfr. [6]):

Teorema 1.1. Se la funzione g verifica le ipotesi sopra enunciate, allora esiste $\zeta \in (\zeta_0, \beta)$ tale che la soluzione $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ del problema ai valori iniziali:

(1.10) $u'' + \frac{N-1}{r} u' + g(u) = 0$ per $r > 0$

(1.11) $u(0) = \zeta$, $u'(0) = 0$

sia strettamente positiva, convergente a zero all'infinito e risulti $u'(r) < 0$ per $r > 0$. Se inoltre

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{g(s)}{s} < 0,$$

esistono $c, \delta > 0$, costanti, tali che $u(r) \leq c \exp(-\delta r)$ per $r > 0$.

Ovviamente dal teorema 1.1 si deduce un risultato di esistenza per le soluzioni positive e radialmente simmetriche del problema (0.1)-(0.2), come già si è detto nell'introduzione. Per quanto riguarda il problema dell'unicità della soluzione positiva, dopo il primo risultato ottenuto da Coffman [8] per l'eq. (1.1), Peletier e Serrin hanno dimostrato in [21] che:

Teorema 1.2. Se la funzione g verifica l'ipotesi (1.6) e inoltre:

(1.12) $\lim_{s \to 0^+} \frac{g(s)}{s} < 0$

(1.13) la funzione $s \longmapsto \frac{g(s)}{s - \zeta_0}$ è non crescente in $\{s > \zeta_0 \mid g(s) > 0\}$,

allora l'equazione (1.10) ha, al più, un'unica soluzione $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ che risulti strettamente positiva, convergente a zero all'infinito, e con $u'(0) = 0$.

La condizione (1.13) (che, pur non essendo necessaria non può essere eliminata del tutto) significa geometricamente che l'insieme $D = \{(s,t) \mid s > \zeta_0, 0 < t < g(s)\}$ è stellato rispetto al punto $(\zeta_0, 0)$.

Un altro risultato di unicità è stato ottenuto da McLeod-Serrin [19]; esso, a differenza del teorema 1.2, si applica anche all'eq. (1.1) e quindi generalizza il risultato di Coffman. Rinunciando ad esporlo in tutta la sua generalità, ci si limita ad osservare che, nel caso dell'eq.

$$-\Delta u = -u + u^p, \quad p > 1, \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

si dimostra l'unicità della soluzione positiva radialmente simmetrica quando

$$p < +\infty, \quad 1 \leqq N \leqq 2$$
$$p \leqq \frac{N}{N-2}, \quad 2 \leqq N \leqq 4$$
$$p < \frac{8}{N}, \quad 4 < N \leqq 8.$$

Resta invece aperto il problema dell'unicità per p minore dell'esponente critico $(N+2)/(N-2)$ ma maggiore dei valori sopra indicati.

Lo studio dell'eq.(0.1) diventa molto complicato se si suppone che la funzione g possa dipendere anche da $|x|$, e in effetti non sono stati ottenuti molti risultati in questa direzione. In [6] si studia il problema ai valori iniziali associato

$$(1.14)\qquad \begin{cases} u''(r)+\dfrac{N-1}{r}u'(r)+g(r,u(r))=0 & \text{per } r>0 \\ u(0)=\zeta \quad ,u'(0)=0 \end{cases}$$

supponendo sostanzialmente $g=g(r,s)$ $(r,s\geq 0)$ localmente lipschitziana e non crescente rispetto ad r per ogni $s\geq 0$. Con l'ausilio di ulteriori ipotesi di carattere tecnico (dello stesso tipo di quelle del teorema 1.1) si dimostra l'esistenza di almeno una soluzione positiva $u\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ di (1.14), decrescente a zero all'infinito, con $u'<0$.

L'ipotesi (1.9) del teorema 1.1 impone alla funzione g di crescere all'infinito meno velocemente di $s^{\frac{N+2}{N-2}}$ ($(N+2)/(N-2)$ è l'esponente critico).

Tuttavia anche nel caso supercritico si può ottenere un risultato di esistenza (cfr. [6]):

Teorema 1.3. Sia $N\geq 3$ e sia $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana con $g(0)=0, g(s)>0$ per $s>0$ tale che:

(1.15) $\quad 2^*G(s)-sg(s)\leq 0 \quad$ per $s\geq 0 \quad (2^*=2N/(N-2))$.

Allora, per ogni $\zeta>0$, la soluzione $u(r)$ del problema ai valori iniziali (1.10)-(1.11) è strettamente positiva, convergente a zero all'infinito, e risulta $u'(r)<0$ per $r>0$.

§2.

In questo paragrafo si esporranno alcuni risultati preliminari indispensabili per il seguito.Si inizia con uno studio sul comportamento all'infinito delle funzioni radialmente simmetriche di $H^1(\mathbb{R}^N)$,dovuto principalmente a Strauss [27].

Lemma 2.1.(Strauss). Sia $N \geqq 2$.Ogni funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ radialmente simmetrica è quasi ovunque uguale ad una funzione $U(x)$,continua per $x \neq 0$ tale che,per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| \geqq 1$:

$$|U(x)| \leqq c|x|^{\frac{1-N}{2}}|u|_{H^1} \; ,$$

ove c è una costante positiva dipendente solo da N.

Lemma 2.2.(Ber.-Li. [5]).Sia $N \geqq 3$.Ogni funzione $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$ radialmente simmetrica è quasi ovunque uguale ad una funzione $U(x)$,continua per $x \neq 0$,tale che,per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| \geqq 1$:

$$|U(x)| \leqq c|x|^{\frac{2-N}{2}}|u|_{H^1_0} \; ,$$

ove c è una costante positiva dipendente solo da N.

Lemma 2.3. (Ber.-Li.[5]).Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leqq p < +\infty)$ è radialmente simmetrica, positiva e decrescente (cioè $|x| < |y| \Rightarrow u(x) \geqslant u(y)$),allora per $x \in \mathbb{R}^N$ con $x \neq 0$, risulta:

$$|u(x)| \leqslant |x|^{-\frac{N}{p}} (N/S_n)^{\frac{1}{p}} \; |u|_{L^p}$$

(S_n è la superficie della sfera unitaria in $\mathbb{R}^N$).

Seguendo Ber.-Li. [5] si passa ad esporre un risultato di compattezza dovuto originariamente a Strauss.

Lemma 2.4.Siano P,Q funzioni continue,e siano u_n ,v funzioni misurabili $(n \geqq 1)$ tali che:

i) $\displaystyle \lim_{|s| \to \infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$

ii) $\displaystyle \sup_n \int |Q(u_n)| \; < +\infty$

iii) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} P(u_n(x)) = v(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^N$.

Allora, per ogni insieme di Borel limitato $B \subset \mathbb{R}^N$,si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_B |P(u_n) - v| = 0. \tag{2.1}$$

Inoltre,supposto anche:

iv) $\displaystyle \lim_{s \to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$

v) $\lim_{|x|\to\infty} u_n(x) = 0$ uniformemente rispetto ad n,

si ha:

(2.2) $\lim_{n\to\infty} P(u_n) = v$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Si è ora in grado di dimostrare un teorema di immersione compatta (che recentemente Esteban-Lions [11] hanno notevolmente generalizzato).

Teorema 2.5. ([27], [5]).Per $2<p<2N/(N-2)$ la restrizione ad $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ dell'immersione $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ è compatta.

Dimostrazione.Sia $(u_n)_n$ una successione limitata in $H^1_r(\mathbb{R}^N)$.Per il Lemma 2.1 si ha $\lim_{|x|\to\infty} u_n(x) = 0$ uniformemente rispetto ad n.A meno di estrarre una sottosuccessione,si può supporre che $(u_n)_n$ sia debolmente convergente in $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ e quasi ovunque convergente verso una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Posto $P(s)=|s|^p$, $Q(s)=s^2+|s|^{2^*}$ $(2^*=2N/(N-2))$,si può applicare il lemma 2.4 ottenendo che $(u_n)_n$ ha un'estratta convergente fortemente in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Come si è anticipato nell'introduzione,impostando il problema (0.1)-(0.2) con metodi variazionali,sorge la necessità di studiare un funzionale definito su $H^1(\mathbb{R}^N)$ del tipo:

$$V(u)= \int G(u)$$

ove $G'=g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione verificante opportune ipotesi.A questo proposito si ha:

Lemma 2.6. Sia $N\geq 3$ e sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $g(0)=0$ e inoltre:

i) $$\lim_{|s|\to\infty}'' \frac{|g(s)|}{|s|^{\ell}} < +\infty \quad \text{con } \ell=(N+2)/(N-2)$$

ii) $$\lim_{s\to 0}'' \frac{|g(s)|}{|s|} < +\infty.$$

Allora il funzionale $V(u)=\int G(u)$ (con $G'=g$) è ben definito e di classe $\mathscr{C}^1$ sullo spazio $H^1(\mathbb{R}^N)$,e risulta:

$$(V'(u),v) = \int g(u)v \qquad (u,v \in H^1(\mathbb{R}^N)).$$

Per la dimostrazione del lemma precedente,che è in una certa misura standard (cfr.ad es. Vainberg [30]),si rinvia a [5],e così pure per i seguenti risultati di regolarità e di decrescenza all'infinito.

Lemma 2.7.Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua dispari tale che:

i) $$\lim_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{s^{\ell}} = 0 , \quad \text{con } \ell=(N+2)/(N-2)$$

ii) $$\lim_{s\to 0^+}'' \frac{g(s)}{s} < 0 .$$

Allora :

1°) ogni soluzione radialmente simmetrica $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ dell'eq.(0.1) è di classe $\mathscr{C}^2$: $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^N)$ e inoltre:

2°) esistono c, δ ,costanti positive tali che:
$|D^\alpha u(x)| \leqslant c\exp(-\delta|x|)$,con $x \in \mathbb{R}^N$, $|\alpha| \leqslant 2$.

Si conclude infine enunciando una variante della nota identità di Pohožaev [22] dovuta a [5], [28].

<u>Lemma</u> 2.8. Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua dispari tale che

$$\lim_{s\to+\infty}'' \frac{g(s)}{s^{\ell}} \leqq 0 \qquad \text{con } \ell = (N+2)/(N-2).$$

Allora:

1°) se risulta $-\infty < \lim_{s\to 0^+}' \frac{g(s)}{s} \leq \lim_{s\to 0^+}'' \frac{g(s)}{s} < 0$,ogni soluzione radialmente simmetrica $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ dell'eq.(0.1) verifica l'identità:

$$\int |\nabla u|^2 = 2^* \int G(u) \ ;$$

2°) se invece $\lim_{s\to 0^+}'' \frac{g(s)}{s^{\ell}} \leqq 0$,ogni soluzione radialmente simmetrica $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$ dell'eq.(0.1) verifica la disuguaglianza:

$$\int |\nabla u|^2 \geqslant 2^* \int G(u) \geqslant -\infty \ .$$

§3.

In questo paragrafo, seguendo (essenzialmente) Ber.-Li. [5], Part II, si studierà il problema

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

ove $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua dispari verificante le ipotesi:

(3.1) $\quad -\infty < \lim'_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq \lim''_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = -m < 0$

(3.2) $\quad \lim''_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s^\ell} \leqslant 0 \qquad (\ell = (N+2)/(N-2))$

(3.3) $\quad$ esiste $\zeta_\circ > 0$ tale che $G(\zeta) = \int_0^\zeta g(s)ds > 0$. (°)

Più precisamente, dopo aver definito il funzionale $S:H^1(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ ponendo

$$S(u) = \tfrac{1}{2}T(u) - V(u)$$

con

$$T(u) = \int|\nabla u|^2$$

$$V(u) = \int G(u) \ ,$$

si dimostrerà che:

<u>Teorema</u> 3.1. Nelle ipotesi (3.1)-(3.3) sopra enunciate, esiste una successione $(u_k)_k$ di soluzioni distinte di (*) tali che:

u_k è radialmente simmetrica e di classe $\mathscr{C}^2$ in $\mathbb{R}^N$;

$|D^\alpha u_k|$ $(|\alpha|\leq 2)$ decresce esponenzialmente all'infinito;

risulta: $\lim_{k\to\infty} S(u_k) = +\infty$.

Una discussione delle ipotesi (3.1)-(3.3) si trova in [5]: si dimostra, adoperando l'identità di Pohožaev, che la (3.2) e la (3.3) possono ritenersi condizioni necessarie all'esistenza di soluzioni. La (3.1) può invece essere modificata in vari modi: si può da esempio considerare il caso in cui m=0 (caso di "massa zero"); Berestycki e Lions mostrano allora l'esistenza di almeno una soluzione di (*). Più recentemente Struwe [28] ha considerato il caso in cui

$$\lim''_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s^\ell} \leqslant 0,$$

che comprende il caso di massa zero, dimostrando l'esistenza di infinite soluzioni (cfr. §4).

(°) Evidentemente si può supporre $g(\zeta) \geqslant 0$.

L'idea della dimostrazione del teorema 3.1 consiste, grosso modo, nel cercare i punti critici del funzionale V (che viene reso differenziabile su $H^1(\mathbb{R}^N)$ mediante un troncamento della funzione g) ristretto alla varietà:

$$M = \{u \in H^1_r \mid T(u) = 1\};$$

infatti, se u è un punto critico di $V_{|M}$, esiste un moltiplicatore di Lagrange $\vartheta > 0$ tale che $\frac{1}{2}T'(u) = \vartheta V'(u)$, e quindi la funzione $u(x/\sqrt{\vartheta})$ è soluzione di (*).

In [5], Part I, si considera il problema "duale" dei punti critici di T vincolato alla varietà

$$N = \{u \in H^1_r \mid V(u) = 1\},$$

e si dimostra l'esistenza di un punto di minimo w di $T_{|N}$. La corrispondente soluzione $\hat{w}$ di (*) ha l'interessante proprietà di minimizzare il funzionale S nel senso che per ogni altra soluzione u di (*) si ha $0 < S(\hat{w}) \leq S(u)$ (cfr. [9], [5]).

Sia anzitutto $\zeta^* = \inf\{s \geq \zeta \mid g(s) \leq 0\}$ $(\zeta \leq \zeta^* \leq +\infty)$ e si ponga $\hat{g} = g$ se $\zeta^* = +\infty$

$$\hat{g}(s) = \begin{cases} g(\zeta^*) = 0 & \text{se } |s| > \zeta^* \\ g(s) & \text{se } |s| \leq \zeta^* \end{cases}$$

in caso contrario. $\hat{g}$ è una funzione continua dispari, verifica la (3.1), ed inoltre:

(3.2)' $$\lim_{s \to +\infty} \frac{\hat{g}(s)}{s^{\ell}} = 0$$

(3.3)' esiste $\zeta > 0$, tale che, per ogni $s \geqq \zeta$: $\hat{G}(s) = \int_0^s \hat{g}(t)dt > 0$.

Ora, se u è una soluzione dell'equazione $-\Delta u = \hat{g}(u)$, per il principio del massimo risulta $|u| \leq \zeta^*$ e quindi u è anche soluzione del problema (*). Non è quindi restrittivo supporre che g verifichi le ipotesi (3.2)' e (3.3)' invece delle (3.2) e (3.3); si ottiene in tal modo il vantaggio che il funzionale V è ora differenziabile su $H^1(\mathbb{R}^N)$ in virtù del lemma 2.6. Ciò premesso, il teorema 3.1 si otterrà come applicazione di un risultato astratto che ora si esporrà.

Siano $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert ed $(E, |\cdot|_E)$ uno spazio di Banach, reali, con $E \hookrightarrow H \hookrightarrow E'$ (E' è il duale forte di E). Senza venir meno alla generalità si può supporre $|\cdot|_H \leq |\cdot|_E$; si pone inoltre:

$$M = \{x \in E \mid |x|_H = 1\}.$$

M è una varietà di Finsler simmetrica di codimensione 1, che si considererà sempre munita della topologia indotta da E. Per ogni $x \in M$, T_xM è lo spazio tangente ad M in x:

$$T_xM = \{v \in E \mid (v, x) = 0\}$$

($(\cdot,\cdot)$ è il prodotto scalare in H). Sia $J : E \to \mathbb{R}$ un funzionale di classe $\mathscr{C}^1$; per ogni $x \in M$ si definisce il funzionale $J'_M : T_xM \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(J'_M(x), w) = (J'(x), w), \quad w \in T_xM.$$

Si dovrà considerare, nel seguito, il genere $\gamma : \Sigma(M) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ di Krasnosel'skii: $\Sigma(M)$ denota l'insieme delle parti compatte e simmetriche (ri -

spetto all'origine) di M e $\gamma(A)=\min\{n\in\mathbb{N}, n\geq 1 \mid \exists\varphi: A\to S_n$ continua dispari$\}$ oppure $\gamma(A)=\infty$ se $\{\dots\}=\emptyset$, per ogni $A\in\Sigma(A)$.

Per ogni $k\geq 1$ si pone $\Gamma_k=\{A\in\Sigma(M) \mid \gamma(A)\geqslant k\}$; ovviamente $\Gamma_{k+1}\subset\Gamma_k$ e, supponendo $\dim(E)=\infty$, $\Gamma_k\neq\emptyset$ per ogni $k\geqslant 1$.

Un punto $x\in M$ si dice punto critico di $J_{|M}$ se $J'_M(x)=0$, e $\beta\in\mathbb{R}$ si dice livello critico di $J_{|M}$ se esiste un punto critico $x\in M$ di $J_{|M}$ tale che $J(x)=\beta$. K_β denota l'insieme dei punti critici di livello β, e K denota l'insieme di tutti i punti critici. Infine si dice che $J_{|M}$ verifica la condizione di Palais-Smale (P.S.) se:

per ogni successione $(x_n)_n\subset M$ tale che $(J(x_n))_n$ è limitata e $|J'_M(x_n)|\to 0$ esiste una sottosuccessione convergente in M,

mentre si dice che verifica la condizione $(P.S.)^+$ se:

per ogni $a,b>0$ ed ogni successione $(x_n)_n\subset M$ tale che $a\leqslant J(x_n)\leqslant b$ e $|J'_M(x_n)|\to 0$ esiste una sottosuccessione convergente in M.

Teorema 3.2. Sia $J\in\mathscr{C}^1(E,\mathbb{R})$ pari e limitato dall'alto su M. Per ogni $k\geq 1$ si ponga

$$b_k=\sup_{A\in\Gamma_k}\inf_{x\in A} J(x).$$

Allora, se $J_{|M}$ verifica la condizione (P.S.), ogni b_k è un livello critico di $J_{|M}$; se $J_{|M}$ verifica solo la condizione $(P.S.)^+$, ogni $b_k>0$ è un livello critico di $J_{|M}$.

Dimostrazione.

1°) passo: costruzione di un campo vettoriale pseudogradiente localmente lipschitziano su M.

Si ponga $\hat{M}=\{x\in M \mid J'_M(x)\neq 0\}$, e sia $x\in\hat{M}$. Poiché $|J'_M(x)|=\sup_{\substack{w\in T_xM\\ \|w\|=1}}(J'_M(x),w)$, esiste un $w\in T_xM$ con $|w|_E=1$ tale che:

$$(J'_M(x),w)\geqslant\frac{3}{4}|J'_M(x)|;$$

allora il vettore

$$z=z(x)=\frac{3}{2}\,|J'_M(x)|w$$

è un vettore pseudogradiente per $J_{|M}$ in x, cioé verifica le proprietà:

$$\begin{cases} |z|_E\leqslant 2|J'_M(x)| \\ (J'_M(x),z)\geqslant |J'_M(x)|^2 \end{cases}$$

con le disuguaglianze in senso stretto. Ora, considerata per ogni $y\in\hat{M}$ la proiezione $\pi_y(z)=z-(z,y)y$ di z su T_yM, poiché $\pi_y(z)\to z$ per $y\to x$, per la continuità di J'_M esiste un intorno N_x di x in $\hat{M}$ tale che, per ogni $y\in N_x$, $\pi_y(z)$ è un vettore pseudogradiente in y. Sia $(U_{x_i})_{i\in I}$ un ricoprimento localmente finito di $\hat{M}$ ottenuto raffinando $(N_x)_{x\in\hat{M}}$ ($\hat{M}$ è paracompatta). Posto, per $x\in\hat{M}$:

$$v(x)=\Sigma d_i(x)\,\pi_x(z_i)/\,\Sigma\, d_i(x)$$

ove $d_i(x)=d(x,\hat{M}\setminus U_{x_i})$ e $z_i=z(x_i)$, le somme che compaiono al secondo membro sono formate da un numero finito di addendi, $v(x)$ è un vettore pseudogradiente in x e l'applicazione $x \mapsto v(x)$ è localmente lipschitziana, e dunque la dimostrazione del primo passo è completa.

2°) passo: un lemma di deformazione.

Se $J_{|M}$ verifica l'ipotesi (P.S.) (risp. $(P.S.)^+$) e $b \in \mathbb{R}$ (risp. $b>0$) non è un valore critico di $J_{|M}$, esistono $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ con $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$ ed un'applicazione $\eta \in \mathscr{C}(M,M)$ tali che:

i) $x \in M, |J(x)-b| \geqslant \bar{\varepsilon} \Rightarrow \eta(x)=x$

ii) η è un omeomorfismo dispari

iii) $x \in M \Rightarrow J(\eta(x)) \geqslant J(x)$

iv) $x \in M,\ J(x) \geqslant b-\varepsilon \Rightarrow J(\eta(x)) \geqslant b+\varepsilon$.

Per dimostrare il lemma di deformazione, si inizia con l'osservare che, utilizzando (P.S.) o $(P.S.)^+$ se $b>0$, esistono $\bar{\varepsilon}, \delta>0$ tali che, per ogni $x \in M$, con $b-\bar{\varepsilon} \leqslant J(x) \leqslant b+\bar{\varepsilon}$, risulti

$$|J'_M(x)| \geqq \delta.$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, si ponga

$$A=\{x \in M \mid\ |J(x)-b| \geqslant \bar{\varepsilon}\}, \qquad B=\{x \in M \mid\ |J(x)-b| \leqslant \varepsilon\}.$$

Esiste $g:M \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e pari tale che $0 \leqq g \leqq 1$ e $g=0$ su A mentre $g=1$ su B. Sia allora $F:M \to T(M)$ l'applicazione definita ponendo

$$F(x)=\begin{cases} g(x)v(x)/|v(x)|_E & \text{se } x \in M \setminus A \\ 0 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

(si suppone, com'è lecito, che il campo vettoriale v sia dispari); si estende ora F a tutto E ponendo

$$\hat{F}(x)=\begin{cases} h(|x|_H)F(x/|x|_H) & \text{se } \tfrac{1}{2} \leqq |x|_H \leqq 2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove $h:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è un'applicazione localmente lipschitziana tale che $0 \leq h \leq 1$, $h(1)=1$ e $h(s)=0$ per $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ e per $s \geq 2$.

$\hat{F}$ è un campo vettoriale localmente lipschitziano e limitato su E pertanto, per ogni $x \in E$, esiste un'unica soluzione $\eta(t,x)$, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \hat{F}(\eta) \\ \eta(0)=x. \end{cases}$$

Sia $T \in \mathbb{R}$ con

(3.4) $\qquad T>4\varepsilon/\delta$

e si ponga $\eta(\cdot)=\eta(T,\cdot)$. Si verificano facilmente la i) e la ii); quanto alla iii), essa è ovvia se $x \in A$; se invece $x \in M \setminus A$, derivando l'applicazione $t \mapsto J(\eta(t,x))$ si ottiene subito

(3.5) $\qquad \frac{d}{dt} J(\eta(t,x)) \geqslant \frac{\delta}{2} g(\eta(t,x)),$

quindi $J(\eta(t,x))$ è crescente in t,da cui la iii).Si dimostra infine la iv):se $x\in M$ e $J(x)>b+\varepsilon$,l'asserto è ovvio per la iii).Se invece $x\in B$, si ragiona per assurdo:se $J(\eta(x))\leqslant b+\varepsilon$ si avrebbe anche $\eta(t,x)\in B$ per ogni $t\in[0,t]$,e quindi,per la (3.5) (essendo g=1 su B):

$$\frac{d}{dt}\,|J(\eta(t,x))|\geqslant\frac{\delta}{2}$$

e integrando: $2\varepsilon\geqslant J(\eta(x))-J(x)\geqslant\frac{\delta}{2}T$,contro la(3.4).Così anche la iv) è dimostrata.

3°) passo:conclusione.

La dimostrazione vera e propria del teorema può ora essere svolta per assurdo:si supponga che b_k non sia un livello critico,e siano ε , $\bar{\varepsilon}$ ed η come previsto dal lemma di deformazione.Per definizione di b_k,esiste $A\in\Gamma_k$ tale che $b_k-\varepsilon<\inf\limits_{x\in A}J(x)\leqslant b_k$. Allora $x\in A\Rightarrow J(x)>b_k-\varepsilon\Rightarrow$(per la iv)) $J(\eta(x))>b_k+\varepsilon$.D'altro lato,poiché η è un omeomorfismo dispari, $\eta(A)\in\Gamma_k$ e quindi $\inf\limits_{x\in\eta(A)}J(x)\geqslant b_k+\varepsilon$,contro la definizione di b_k.

Il comportamento della successione $(b_k)_k$ per $k\to\infty$ può essere notevolmente precisato pur di fare altre opportune ipotesi.Si ha infatti (cfr.Krasnosel'skii [17] per risultati simili):

Teorema 3.3.Si supponga che E sia un sottospazio riflessivo,separabile e denso di H e che $J\in\mathscr{C}^1(E,\mathbb{R})$ verifichi tutte le ipotesi del teorema 3.2 e inoltre:

$J(0)=0$

$b_k>0$ per ogni $k\geqq 1$.

Infine,posto $S=\{x\in E\,|\,J(x)\geqq 0,\,|x|_H\leqq 1\}$,si supponga che J verifichi in S una condizione di debole semicontinuità superiore:

se $(x_n)_n\subset S$ e $x_n\to x\in E$ debolmente in H,allora $\limsup\limits_{n\to\infty}J(x_n)\leqq J(x)$.

Si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty}b_k=0.$$

Nelle ipotesi del teorema esiste una successione $(E_n)_n$ di sottospazi di E con $\dim(E_n)=n$, $E_1\subset E_2\ \ldots\subset E_n\ldots\subset E$ la cui riunione è densa in E (e quindi in H).Per ogni $n\geqq 1$ sia $P_n:H\to E_n$ la proiezione ortogonale di H su E_n.

Lemma 3.4.Nelle ipotesi del teorema 3.3,per ogni $\varepsilon>0$ esistono $\varrho=\varrho_\varepsilon>0$ e $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tali che, per ogni $k\geqq k_\varepsilon$ ed $x\in S$ con $|P_k(x)|_E\leq\varrho$,si abbia:

$J(x)\leqslant\varepsilon$.

Dimostrazione del lemma 3.4.Supposta falsa la tesi,esiste $\varepsilon>0$ tale che, per ogni $\varrho>0$,esiste una successione $(x_{n_i})_i\subset S$ con $|P_{n_i}(x_{n_i})|\leqq\varrho$ e $J(x_{n_i})\geqq\varepsilon$.

Poiché $J(0)=0$,per l'ipotesi di semicontinuità esiste $\varrho>0$ tale che:

(3.6) per ogni $x\in S$, $|x|_H\leq\varrho$,risulta $J(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Considerata allora la successione $(x_{n_i})_i$,si può supporre (a meno di estrarne una sottosuccessione) che

$x_{n_i}\to x\in H$ debolmente in H

$P_{n_i}(x_{n_i})\to y\in E$ debolmente in E.

Poiché

$$|x-y|_H^2 = \lim_{i\to\infty} (x_{n_i} - P_{n_i}(x_{n_i}), x-y) = 0$$

segue x=y e quindi $x \in E$.Dunque $P_{n_i}(x_{n_i}) \to x$ debolmente in E e quindi $|x|_E \leqslant \lim'_{i\to\infty} |P_{n_i}(x_{n_i})|_E \leqslant \varrho$,nonché $|x|_H \leqslant \varrho$ .Ma allora,per la (3.6) $J(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,mentre d'altro lato, $\varepsilon \leqslant \lim''_{i\to\infty} J(x_{n_i}) \leqslant J(x)$,assurdo.

Dimostrazione del teorema 3.3.Siano $\varepsilon>0$ e k_ε come previsto dal lemma.Si ha allora $b_k \leqslant \varepsilon$ per ogni $k>k_\varepsilon$;infatti,se per un certo $k>k_\varepsilon$ fosse $b_k > \varepsilon$,esisterebbe $A \in \Gamma_k$ con $\varepsilon < \inf_{x\in A} J(x) \leqslant b_k$ e quindi,per il lemma,$x \in A \Rightarrow |P_{k_\varepsilon}(x)|_E > \varrho$.

Ma allora $x \mapsto P_{k_\varepsilon}(x)/|P_{k_\varepsilon}(x)|_E$ sarebbe un'applicazione continua dispari di A in $\{x \in E_{k_\varepsilon} \mid |x|_{E_{k_\varepsilon}} = 1\}$,pertanto $\gamma(A) \leqslant k_\varepsilon < k$,il che è assurdo.

Nel seguito del paragrafo,adoperando i risultati astratti fin qui ottenuti,si dimostrerà il teorema 3.1.Il ruolo del funzionale J sarà assunto dal funzionale V,con $E=H^1_r(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid u(x)=u(|x|)\}$ ed $H=H^1_{or}(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1_o(\mathbb{R}^N) \mid u(x)=u(|x|)\}$.

<u>Lemma</u> 3.5. Nelle ipotesi (3.1)-(3.2),il funzionale $V(u)=\int G(u)$ è limitato dall'alto sull'insieme $M=\{u \in H^1_r \mid \int |\nabla u|^2 = 1\}$.

Dimostrazione.Si ponga:

$$\text{(3.7)}\qquad \begin{cases} g_1(s)=(g(s)+ms)^+ \ , \ g_2(s)=g_1(s)-g(s) & \text{per } s\geqslant 0, \\ g_i(s)=-g_i(-s) & \text{per } s<0 . \end{cases}$$

Fissato un ε con $0<\varepsilon<1$,dalle (3.1)-(3.2) si vede che esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che:

$$\text{(3.8)}\qquad g_1(s) \leqslant C_\varepsilon s^\ell + \varepsilon g_2(s) \qquad \text{per } s \geqslant 0.$$

Posto $G_i' = g_i$ si ottiene

$G_1(s) \leqslant C_\varepsilon |s|^{2^*} + \varepsilon G_2(s)$ per $s \in \mathbb{R}$,quindi,per ogni $u \in M$:

$$\text{(3.9)}\qquad V(u)=\int G(u) = \int G_1(u) - \int G_2(u) \leqslant C_\varepsilon |u|^{2^*}_{L^{2^*}} + (\varepsilon-1)\int G_2(u) \leqslant C_\varepsilon |u|^{2^*}_{L^{2^*}} ,$$

da cui l'asserto per l'immersione di Sobolev:$H^1_o(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Si ponga ora

$$g_\pm(s) = \begin{cases} g^\pm(s) & \text{se } s \geqslant 0 \\ -g^\pm(-s) & \text{se } s<0; \end{cases}$$

Si ha il seguente lemma.

<u>Lemma</u> 3.6. Si supponga che la funzione(continua dispari) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifichi l'ipotesi (3.2)' ed inoltre:

$$\text{(3.10)}\qquad \lim''_{s\to 0} \frac{g(s)}{s^\ell} \leqslant 0.$$

Allora,se $(u_n)_n$ è una successione in $H=H^1_{or}(\mathbb{R}^N)$ convergente debolmente in H verso u,si ha:

(3.11) $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}'' V(u_n) \leq V(u)$.

Dimostrazione(Struwe [28]).Si applica il lemma 2.4 con $P(s)=G_+(s)$ e $Q(s)=$ $=|s|^{2^*}$. Dalle ipotesi (3.2)' e (3.10) seguono immediatamente la i) e la iv) del lemma 2.4;inoltre $(u_n)_n$ è limitata in $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ e in $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e converge quasi ovunque verso u,quindi sono verificate la condizione ii) e,per la continuità di G_+ ,la iii) con $v=G_+(u)$.Infine,per il lemma 2.2 e la limitatezza in $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ di $(u_n)_n$,anche la v) è verificata.

Pertanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int G_+(u_n) = \int G_+(u).$$

D'altro lato,per il lemma di Fatou,si ha:

$$\int G_-(u) = \int \lim_{n\to\infty}{}' G_-(u_n) \leq \lim_{n\to\infty}{}' \int G_-(u_n),$$

cosicché:

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \int G(u_n) = \lim_{n\to\infty}{}'' \int G_+(u_n) - \lim_{n\to\infty}{}' \int G_-(u_n) \leq \int G(u),$$

e la (3.11) è dimostrata.

<u>Lemma</u> 3.7. Il funzionale V verifica l'ipotesi $(P.S.)^+$ su M.

Dimostrazione.Siano $\alpha, c \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_n \subset M$ tali che $0<\alpha\leq V(u_n)\leq c$,ed inoltre $|V'_M(u_n)| \to 0$.Si deve dimostrare che $(u_n)_n$ possiede un'estratta convergente.

Anzitutto,dalla (3.8) scritta per $\varepsilon=\frac{1}{2}$,si ha $\alpha \leq V(u_n) \leq C-\frac{1}{2}\int G_2(u_n)$, pertanto $\int G_2(u_n) \leq C$.Poiché poi $g_2(s) \geq ms$ per $s>0$,e quindi $G_2(s) \geq \frac{m}{2}s^2$, si ottiene subito che $(u_n)_n$ è limitata in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e quindi in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Allora la condizione $|V'_M(u_n)| \to 0$ equivale (cfr. [5],Part.II,n°8,lemma 3,pag.351) a:

(3.12) $\qquad \vartheta_n \Delta u_n + g(u_n) \to 0 \qquad$ con $\vartheta_n = \int g(u_n)\cdot u_n$

Dalle ipotesi (3.1) e (3.2)' segue facilmente $|g(s)s| \leq C(|s|^2+|s|^{2^*})$ e quindi $|\vartheta_n| \leq C(|u_n|^2_{L^2} + |u_n|^{2^*}_{L^{2^*}}) \leq C$,cioé $(\vartheta_n)_n$ è limitata.Dunque è lecito supporre (a meno di una sottosuccessione):

$$\vartheta_n \to \vartheta.$$

Analogamente,essendo $(u_n)_n$ limitata in $H^1(\mathbb{R}^N)$,si può supporre $u_n \to u$ debolmente in $H^1(\mathbb{R}^N)$;allora,dalla (3.2)' e dal lemma 2.4 si ottiene subito $g(u_n) \to g(u)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Dunque,dalla (3.12):

(3.13) $\qquad \vartheta \Delta u + g(u)=0.$

E' facile vedere che $\vartheta>0$:infatti dalla (3.13) per l'identità di Pohožaev si ha

$$\frac{N-2}{2}\,\vartheta\,|\nabla u|^2_{L^2} = NV(u) \geq N\alpha > 0,$$

quindi $\vartheta>0$.

Si ha inoltre $\vartheta = \lim\limits_{n\to\infty} \int g(u_n)u_n \leq \int g(u)u$,e poiché dalla (3.13) si ha $\vartheta \int |\nabla u|^2 = \int g(u)u$, se ne deduce:

$$\int |\nabla u|^2 \geq 1.$$

Poiché d'altro lato $u_n \to u$ debolmente anche in $H^1_0(\mathbb{R}^N)$,si ha $|u|_{H^1_0} \leq \lim\limits_{n\to\infty}{}' |u_n|_{H^1_0} = 1$,cioé,in definitiva:

$$\int |\nabla u|^2 = 1.$$

Ciò dimostra che u_n converge fortemente in $H^1_0(\mathbb{R}^N)$.

D'altro lato si ha pure (notazioni (3.7)) $\lim_{n\to\infty}\int g_2(u_n)u_n = \int g(u)u$; posto allora $q(s)=g_2(s)s-ms^2$, utilizzando il lemma di Fatou, si ha:

$$\int q(u) \leqslant \lim_{n\to\infty}' \int q(u_n), \qquad \int u^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}' \int u_n^2 .$$

Allora dalla relazione $\int g_2(u_n)u_n \longrightarrow \int g_2(u)u$, si ottiene facilmente

$$\lim_{n\to\infty}\int u_n^2 = \int u^2 .$$

Ciò dimostra che $u_n \to u$ fortemente in $L^2(\mathbb{R}^N)$. In conclusione $(u_n)_n$, o meglio una sua sottosuccessione, converge fortemente in $H^1(\mathbb{R}^N)$, come si doveva dimostrare.

Bisogna notare che il funzionale $V_{|M}$ non verifica l'ipotesi (più forte) (P.S.) e quindi, per applicare il teor.3.2, è necessario dimostrare che, per ogni $k \geqq 1$,

(3.14) $\qquad b_k > 0$

ove, come di consueto, $b_k = \sup_{A\in\Gamma_k} \inf_{u\in A} V(u)$. La (3.14) si trova dimostrata in [5] al quale si rinvia per i dettagli. Grosso modo, si costruisce un $A_k \in \Sigma(M)$ tale che $u \in A_k \Rightarrow V(u) > 0$, e A_k sia l'immagine, per un'applicazione continua dispari, del poliedro $\pi_k = \{\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \mid \Sigma|\lambda_i| = 1\}$. Allora evidentemente $A_k \in \Gamma_k$, e quindi $b_k > 0$.

Dimostrazione del teorema 3.1. Lo spazio di Banach $H^1_r(\mathbb{R}^N)$ è riflessivo, separabile e denso in $H^1_b(\mathbb{R}^N)$, e il funzionale $V: H^1_r(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathscr{C}^1$, pari e limitato dall'alto su M. Inoltre $V_{|M}$ verifica la condizione $(P.S.)^+$, e si ha $V(0)=0$, $b_k > 0$ per ogni $k \geqslant 1$. Visto anche il lemma 3.6, è allora possibile applicare i teoremi 3.2 e 3.3: ogni b_k, $k \geqslant 1$ è un livello critico per $V_{|M}$, e risulta

(3.15) $\qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$

Per ogni $k \geqq 1$ sia z_k un punto critico di $V_{|M}$ di livello b_k. Posto

$$\mu_k = (V'(z_k), z_k),$$

si ha $\mu_k T'(z_k) = V'(z_k)$, e quindi $-\mu_k \Delta z_k = g(z_k)$. Dall'identità di Pohožaev si ricava

$$1 = \int |\nabla z_k|^2 = 2^* \int \frac{1}{\mu_k} G(z_k) = \frac{2^*}{\mu_k} V(z_k) = \frac{2^*}{\mu_k} b_k ,$$

quindi $\mu_k > 0$.

Posto allora $\vartheta_k = 1/\mu_k$, si consideri la funzione $u_k(x) = z_k(x/\sqrt{\vartheta_k})$; si verifica subito che u_k è una soluzione del problema (*) e, per il lemma 2.7, essa è di classe $\mathscr{C}^2$ e decresce esponenzialmente all'infinito con le sue derivate. Si ha infine:

$$S(u_k) = \tfrac{1}{2} T(u_k) - V(u_k) = \frac{1}{N} T(u_k) = \frac{1}{N} \vartheta_k^{\frac{N-2}{2}} T(z_k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} b_k^{-\frac{N-2}{2}},$$

e quindi, per la (3.15),

(3.16) $\qquad \lim_{k\to\infty} S(u_k) = +\infty$.

Il teorema 3.1 è così interamente dimostrato.

Recentemente Esteban [10] ha studiato una variante del problema (*): essa consiste nel determinare le soluzioni assialmente simmetriche (nel senso che $u(x_1, x_2) = u(x_1, |x_2|)$) del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u=g(u) & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^p \\ u=0 & \text{su } \partial(\Omega\times\mathbb{R}^p), \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$. Sotto ipotesi che,in parte,sono una estensione di (3.1)-(3.3),si dimostra l'esistenza di infinite soluzioni del problema,di cui una positiva.

Infine,un'altra variante del problema (*) si trova trattata in Lions [18],dove,in luogo dell'operatore Δ di Laplace,si considera un operatore ellittico a coefficienti non costanti.

§4.

Come si è visto, il problema (*) del paragrafo precedente, conduce allo studio del funzionale

$$S(u)=\tfrac{1}{2}\,T(u)-V(u)=\tfrac{1}{2}\int|\nabla u|^2-\int G(u)$$

sullo spazio $H^1_r=\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\mid u(x)=u(|x|)\}$. Se invece si considera S definito sullo spazio

$$H^1_{or}=\{u\in H^1_o(\mathbb{R}^N)\mid u(x)=u(|x|)\},$$

si ha che:

1°) può essere $|S(u)|=\infty$ per qualche $u\in H^1_{or}$

2°) S non è differenziabile su H^1_{or}, nemmeno dopo un troncamento di g.

Tuttavia Struwe, in [28] ha sviluppato un metodo che consente di studiare direttamente il funzionale $S:H^1_{or}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$: si introduce anzitutto un concetto, opportunamente indebolito, di "punto critico" per S. Ogni "punto critico" è anche una soluzione del problema (0.1)-(0.2), e si dimostra l'esistenza di infiniti "punti critici" distinti su

$$M=\{u\in H^1_{or}\setminus\{0\}\mid G(u)\in L^1(\mathbb{R}^N),\ \int|\nabla u|^2=2^*\int G(u)\}.$$

Si premettono alcune definizioni di carattere generale.

Sia $(B,|\cdot|_B)$ uno spazio di Banach riflessivo, e sia $(T_i,|\ |_{T_i})_{i\in I}$ una famiglia di spazi di Banach tali che $T=\bigcup_i T_i$ sia un sottoinsieme denso di $(B,|\cdot|_B)$. Sia poi $E:B\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ un funzionale su B tale che, per ogni $u\in B$ con $|E(u)|<\infty$, esista e sia continua per ogni $i\in I$, la derivata parziale di E rispetto a T_i; ciò significa che l'applicazione $w\mapsto E(u+w)$ $(w\in T_i)$ è finita e Fréchet-differenziabile in $0\in T_i$, e il suo differenziale in 0, che si denoterà con $E'_{T_i}(u)$, è continuo: $E'_{T_i}(u)\in T_i'$. Si suppone inoltre che l'applicazione $u\mapsto E'_{T_i}(u)\in T_i'$ sia continua nel suo dominio di definizione.

Definizione 4.1. Dicesi "punto critico" di E ogni $u\in B$ tale che $|E(u)|<\infty$ ed $E'_{T_i}(u)=0$ per ogni $i\in I$.

Nel seguito, parlando di punti critici, si intenderà sempre far riferimento alla definizione precedente.

Sia M un sottoinsieme di B sul quale S risulti finito. Il seguente criterio svolge il ruolo della classica condizione di Palais-Smale.

Criterio A* . Se $(u_n)_n\subset M$ converge debolmente in B ed inoltre, per ogni $i\in I$, si ha $|E'_{T_i}(u_n)|_{T_i'}\to 0$, allora esiste una sottosuccessione fortemente convergente verso un punto critico di E in M.

Si viene ora al problema (0.1)-(0.2). Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua dispari tale che:

(4.1) $\quad \lim''_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s^\ell} \leq 0 \quad$ con $\ell = (N+2)/(N-2)$

(4.2) $\quad \lim''_{s\to +\infty} \frac{g(s)}{s^\ell} \leq 0$

(4.3) $\quad$ esiste $\zeta_1 > 0$ tale che $G(\zeta_1) = \int_0^{\zeta_1} g(s)ds > 0$.

Il risultato principale è espresso dal seguente teorema che,oltre a ritrovare i risultati del teorema 3.1,include il caso di "massa zero", cioé il caso in cui $\lim''_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = 0$.

Teorema 4.2. Nelle ipotesi (4.1)-(4.3),esistono infinite soluzioni $u_k \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^N)$, radialmente simmetriche,del problema (0.1)-(0.2).

Come si è già osservato nel paragrafo 3,è sufficiente dimostrare il teorema 4.2 nell'ipotesi (4.1) e:

(4.2)' $\quad \lim_{s\to +\infty} \frac{g(s)}{s^\ell} = 0$

(4.3)' $\quad$ esiste $\zeta_2 > 0$ tale che,per ogni $\zeta > \zeta_2 : G(\zeta) > 0$.

Per ogni $L \in \mathbb{N}$,sia $T_L = \{u \in H^1_{or} \mid u(x)=0 \text{ per } |x| \geq L\}$,munito della consueta norma (di spazio di Hilbert) di $H^1_0(\mathbb{R}^N)$.Posto $T = \bigcup_L T_L$,poiché $\mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{or} \subset T \subset H^1_{or}$, T è denso in H^1_{or}.

Per ogni $L \in \mathbb{N}$,ed ogni $u \in H^1_{or}$ con $|S(u)| < \infty$,è ben definita l'applicazione parziale $v \mapsto S(u+v) \in \mathbb{R}$ $(v \in T_L)$,essa è Fréchet-differenziabile per v=0 e si ha:

$$(S'_{T_L}(u),w) = \int_{B_L} \nabla u \nabla w - \int_{B_L} g(u)w.$$

I punti critici di S (sempre nel senso della definizione 4.1) sono soluzioni del problema dato.

Lemma 4.3. Il funzionale S è coercivo su M e verifica il criterio A*.

Dimostrazione.Se $u \in M$,si ha $S(u) = \frac{1}{N}|u|^2_{H^1_0}$,quindi S è chiaramente coercivo su M.Sia poi $(u_n)_n \subset M$ con $u_n \to u$ debolmente in H^1_{or} ,e si supponga che, per ogni $L \in \mathbb{N}$, $|S'_{T_L}(u_n)|_{T'_L} \to 0$.Allora u è una soluzione debole del problema dato;infatti,poiché $\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s^\ell} = 0$ (ipotesi (4.2)') utilizzando la (2.1) del lemma di compattezza 2.4,si vede che $g(u_n) \to g(u)$ in $L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$.

Ora, se $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N)$,si ha:

$$\int g(u_n)\varphi \to \int g(u)\varphi \ .$$

Fissato allora $L \in \mathbb{N}$ tale che $Spt(\varphi) \subset B_L(0)$,risulta:

$$0 = \lim_{n\to\infty} S'_{T_L}(u_n)\varphi = \lim_{n\to\infty}\left(\int \nabla u_n \nabla\varphi - \int g(u_n)\varphi \right) = \int \nabla u \nabla \varphi - \int g(u)\varphi \ ,$$

cioé u è una soluzione debole di $-\Delta u = g(u)$.Pertanto (cfr.lemma 2.8,lemma 3.6)

$$\int |\nabla u|^2 \geq 2^* \int G(u) \geq \lim''_{n\to\infty} 2^* \int G(u_n) = \lim''_{n\to\infty} \int |\nabla u_n|^2$$

da cui

$$|u|^2_{H^1_0} \leq \underset{n\to\infty}{\lim{}'}\int |\nabla u_n|^2 \leq \underset{n\to\infty}{\lim{}''}\int |\nabla u_n|^2 \leq \int |\nabla u|^2 = |u|^2_{H^1_0} ,$$

cioé $|u_n|_{H^1_0} \to |u|_{H^1_0}$,e quindi $u_n \to u$ fortemente in H^1_{or}.

Si ha pure:

$$\int G(u_n) \to \int G(u), \qquad S(u_n) \to S(u)$$

e quindi $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.Si vedrà in seguito che $u \neq 0$ e pertanto $u \in M$.

Si pone ora, per ogni $u \in H^1_{or}$ con $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\tau > 0$:

$$k(\tau,u) = \int |\nabla u(\tau x)|^2 \, dx - 2^* \int G(u(\tau x))dx = \tau^{2-N}\int |\nabla u|^2 - 2^* \tau^{-N}\int G(u).$$

Sussiste il seguente lemma (per la dimostrazione si veda Struwe [28]):

<u>Lemma</u> 4.4. Per ogni $u \in H^1_{or}$ tale che $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $L \in \mathbb{N}$,la funzione k è differenziabile in $\mathbb{R}^+ x(T+u)$ e inoltre $\nabla_u k(1,u) \in T'_L$ è limitato sui sottoinsiemi H^1_o-limitati,ed esiste una costante $c > 0$ tale che, per $u \in M$,risulti:

$$|u|_{H^1_0} \geqslant c$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} k(\tau,u)\Big|_{\tau=1} \geqq c.$$

Si ponga ora,per $\beta \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{N}$:

$$N_{\beta,L} = \{u \in M \mid |S(u)-\beta| < 1/L \, , \, |S'_{T_L}(u)|_{T'_L} < 2/L\} ,$$

$$M_\beta = \{u \in M \mid S(u) < \beta \}.$$

Ciò premesso,si ha il seguente lemma di deformazione.

<u>Lemma</u> 4.5. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{N}$,esiste $\delta > 0$ ed un'applicazione continua dispari $\Phi_L : M \to M$ tale che:

$$\Phi_L(M_{\beta+\delta}) \subset M_{\beta-\delta} \cup N_{\beta,L}.$$

Dimostrazione.Si ometteranno alcune verifiche (per maggiori dettagli cfr. Struwe [28]).

<u>1° passo</u> :costruzione di un campo vettoriale pseudogradiente $e_L : M \to T_L$.

Se $u \in M$,sia $\xi_L(u) \in T_L$ l'unico vettore tale che

$$|\xi_L(u)|_{H^1_0} = |S'_{T_L}(u)|_{T'_L} \quad , \quad S'_{T_L}(u)(\xi_L(u)) = |S'_{T_L}(u)|^2_{T'_L} .$$

Per continuità la disuguaglianza:

$$(S'_{T_L}(v), \, \xi_L(u)) \geqslant |S'_T(u)|^2_{T'_L} \; -1/2L$$

è verificata in un intorno in M di u.Poiché M è paracompatto,procedendo come di consueto,si costruisce un campo vettoriale $e_L : M \to T_L$ continuo, dispari e tale che:

$$(S'_{T_L}(u), e_L(u)) \geqq |S'_{T_L}(u)|^2_{T'_L} \; -1/2L.$$

Esso,inoltre,è limitato sui sottoinsiemi limitati di M.

Sia ora $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'applicazione lipschitziana tale che $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\alpha(t)=1$ per $t \leqslant \beta+1$, $\alpha(t)=0$ per $t \geqq \beta+2$.Se $\alpha > 0, u \in M$,si pone

$$u^\varepsilon = u - \varepsilon \cdot \alpha(S(u)) \, e_L(u).$$

2° passo : proiezione di u^ε su M.

In generale $u^\varepsilon \notin M$; però $u^\varepsilon \in u+T_L$ quindi $G(u^\varepsilon) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ora, operando un opportuno cambiamento di scala, si può fare in modo che la funzione $x \mapsto u^\varepsilon(\tau x)$ $(\tau>0)$ sia in M. Il valore di τ dipende da ε e da u, quindi $\tau=\tau(\varepsilon,u)$ è una funzione di ε e di u ed è implicitamente definita dalla relazione

$$u^\varepsilon(\tau(\varepsilon,u)x) \in M.$$

Si dimostra che $\tau:]0,\varepsilon_0[\times M \to \mathbb{R}^*_+$ (ε_0 sufficientemente piccolo) è di classe $\mathscr{C}^1$ in ε ed è continua rispetto ad u. Posto $u_\varepsilon(x)=u^\varepsilon(\tau(\varepsilon,u)x)$, si ha quindi $u_\varepsilon \in M$.

3° passo : pur di prendere ε_0 sufficientemente piccolo si ha:

(4.3) $\qquad \varepsilon\leq\varepsilon_0, u \in M \Rightarrow S(u_\varepsilon)-S(u) \leqslant -\varepsilon(S'_{T_L}(u), \alpha(S(u))e_L(u)) + \varepsilon/4L$

(4.4) $\qquad \varepsilon \leq \varepsilon_0, u \in M, |S'_{T_L}(u)|^2_{T'_L}<1/L \Rightarrow |S'_{T_L}(u_\varepsilon)|^2_{T'_L} < 1/2L.$

4° passo : conclusione.

Fissato $\varepsilon\leq\varepsilon_0$, $\varepsilon<1$, e posto $\delta=\varepsilon/8L$ (≤ 1) e $\Phi_L(u)=u_\varepsilon$, si ha che $\Phi_L: M \to M$ è continua e dispari; inoltre, fissato $u \in M_{\beta+\delta}$, si possono presentare le seguenti eventualità:

i) $|S'_{T_L}(u)|^2_{T'_L} \geq 1/L$; allora $S(\Phi_L(u))=S(u_\varepsilon) \leq S(u)-\varepsilon(S'_{T_L}(u), \alpha(S(u))e_L(u)) + \varepsilon/4L=$
$\beta+\delta - \varepsilon(S'_{T_L}(u), e_L(u)) + \varepsilon/4L \leq \beta+\delta - \varepsilon(|S'_{T_L}(u)|^2 - 1/2L) + \varepsilon/4L \leq \beta-\delta$,
pertanto $\Phi_L(u) \in M_{\beta-\delta}$;

ii) $|S'_{T_L}(u)|^2_{T'_L} < 1/L$; allora per la (4.4), $S(\Phi_L(u)=S(u_\varepsilon) \leq S(u)-$
$-\varepsilon(S'_{T_L}(u), \alpha(S(u))e_L(u)) + \varepsilon/4L = S(u)+(S'_{T_L}(u), u^\varepsilon-u) + \varepsilon/4L \leq \beta+\delta+$
$+|S'_{T_L}(u)|_{T'_L}|u^\varepsilon-u|_{T_L} + \varepsilon/4L \leq \beta+\delta+\varepsilon|S'_{T_L}(u)|_{T'_L}|e_L(u)|_{T_L} + \varepsilon/4L \leq \beta+\delta+\varepsilon|S'_{T_L}(u)|^2_{T'_L}+$
$+\varepsilon/4L \leq \beta+\delta+\varepsilon/L+\varepsilon/4L = \beta+\delta+3\varepsilon/4L < \beta+1/L$, e dunque $\Phi_L(u) \in N_{\beta,L}$.

Si introducono ora le seguenti consuete notazioni:

$$\Sigma = \{A \in H^1_{or} \setminus \{0\} \mid A \text{ è chiuso e simmetrico}\}$$

$\gamma: \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è il genere di Krasnoselskii

$$\Sigma_\ell = \{A \in \Sigma \mid A \subset M,\ \gamma(A) \geq \ell, A \text{ è compatto}\} \qquad (\ell \in \mathbb{N})$$

$$K_\beta = \{u \in M \mid S(u)=\beta \text{ e } \forall_{L\in\mathbb{N}}: S'_{T_L}(u)=0\} \qquad (\beta \in \mathbb{R}).$$

Si pone infine:

$$\beta_\ell = \inf_{A\in\Sigma_\ell} \sup_{u\in A} S(u).$$

Lemma 4.6. Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, risulta $\Sigma_\ell \neq \emptyset$ (in particolare $M\neq\emptyset$); i numeri β_ℓ sono ben definiti e

$$\lim_{\ell\to\infty} \beta_\ell = +\infty.$$

Dimostrazione. Fissato $\ell \in \mathbb{N}$, esistono un sottospazio ℓ-dimensionale $W \subset \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{or}$ ed una costante $\alpha_1>0$ tale che, per ogni $w \in \sigma=\{w \in W \mid |w|_{H^1_0}=\alpha_1\}$, sia

$$\int G(w) > 0.$$

Poiché, per ogni $w \in \sigma$, $k(\tau,w)= \tau^{2-N}\int|\nabla w|^2-2^*\tau^{-N}\int G(w)=\tau^{2-N}\alpha_1^2-2^*\tau^{-N}G(w)$, esiste $\tau>0$ tale che $k(\tau,w)>0$. Si può supporre, senza ledere la generalità, che $\tau=1$:

$$\text{per ogni } w\in\sigma : k(1,w)>0.$$

Esiste poi un'altra costante $\alpha_2>0$ tale che, per ogni $w\in\sigma$, risulti $|w|_\infty\leq\alpha_2$. Si consideri ora l'applicazione $\vartheta: W\to H^1_{or}$ definita ponendo:

$$\vartheta(w)(x)=\begin{cases}\alpha_2 & \text{se } w(x)>\alpha_2\\ w(x) & \text{se } |w(x)|\leqslant\alpha_2\\ \alpha_2 & \text{se } w(x)<\alpha_2;\end{cases}$$

è continua e dispari. Poiché W è ℓ-dimensionale, i supporti di $w\in W$ sono contenuti in un unico compatto, e così pure i supporti di $\vartheta(w)$ $(w\in W)$. Pertanto:

$$\int G(\vartheta(w))\leqslant c \text{ , per ogni } w\in W.$$

Per $w\in W$, con $|w|_{H_0^1}\geq\alpha_1$, sia $J(w)=k(1,\vartheta(w))$. J viene estesa per continuità a tutto W, in modo che risulti pari, e inoltre

$$J(w)<0 \text{ per } |w|_{H_0^1}<\alpha_1.$$

Si dimostra che $V=\{w\in W|\ J(w)<0\}$ è un intorno di $0\in W$ aperto, limitato e simmetrico, per cui $\gamma(\vartheta(\partial V))\geqslant\gamma(\partial V)\geqslant\ell$, da cui $\vartheta(\partial V)\in\Sigma_\ell$. Dunque i numeri β_ℓ sono ben definiti, e resta solo da dimostrare che $\lim_{\ell\to\infty}\beta_\ell=+\infty$. Infatti, se $\beta_\ell\leq\beta$, esiste una successione $(A_\ell)_\ell$, $A_\ell\in\Sigma_\ell$, tale che $S(u)\leq2\beta$ per ogni $u\in A_\ell$.

Posto $A=\bigcup_\ell A_\ell$, si dimostra che esiste $(u_n)_n\subset A$ tale che $u_n\perp u_m$ per $n\neq m$.

Poiché S è limitato su $A\subset M$, anche $(|u_n|_{H_0^1})_n$ è limitata, quindi si può supporre $u_n\to u$ debolmente in H^1_{or}. Per la mutua ortogonalità, $u=0$, cosicché (cfr. lemma 3.6)

$$\int G_+(u_n)\to0 \qquad (n\to\infty).$$

Essendo $\int|\nabla u|^2\leq2^*\int G_+(u_n)$, si è ottenuto che $u_n\to0$ fortemente. Ciò è assurdo per il lemma 4.4.

E ormai possibile dimostrare il seguente teorema:

<u>Teorema</u> 4.7. Se g verifica le ipotesi (4.1)-(4.3), esistono infinite coppie $(u_\ell,-u_\ell)$ di punti critici di S su M, caratterizzati dalla condizione

$$S(u_\ell)=\beta_\ell=\inf_{A\in\Sigma_\ell}\sup_{u\in A}S(u) \text{ ,}$$

e $\beta_\ell\to\infty$. Inoltre, se

$$\beta=\beta_\ell=\ldots\ldots=\beta_{\ell+k} \text{ ,}$$

si ha $\gamma(K_\beta)\geq k+1$ e quindi, in particolare, K_β è infinito.

Dimostrazione. Sia $\ell\in\mathbb{N}$ e si ponga $\beta=\beta_\ell$. Se $N_{\beta,L}=\emptyset$ $(L\in\mathbb{N})$, per il lemma 4.5 esiste un'applicazione continua dispari $\Phi_L: M\to M$ tale che $\Phi_L(M_{\beta+\delta})\subset M_{\beta-\delta}$ per un opportuno $\delta>0$. Poiché $\beta=\beta_\ell=\inf_{A\in\Sigma_\ell}\sup_{u\in A}S(u)$, esiste un $A\in\Sigma_\ell$ tale che $A\subset M_{\beta+\delta}$. Allora $\Phi_L(A)\in\Sigma_\ell$, mentre $\Phi_L(A)\subset M_{\beta-\delta}$, assurdo. Dunque $N_{\beta,L}\neq\emptyset$ per ogni $L\in\mathbb{N}$.

Esiste allora una successione $(u_n)_n$ tale che $u_n\in N_{\beta,n}$; si ha allora: $S(u_n)\to\beta$, $|S'_{T_L}(u_n)|_{T_L'}\to0$ (per ogni $L\in\mathbb{N}$). Poiché S è coercivo su M, $(u_n)_n$ è limitata, quindi si può supporre $u_n\to u$ debolmente in H^1_{or}. Per il criterio A*,

$u_n \to u$ fortemente,ed $u \in K_\beta$.Ciò dimostra la prima parte dell'asserto.Quanto alla seconda,supposto $\beta=\beta_\ell=\ldots=\beta_{\ell+k}$,poiché K_β è compatto (criterio A*),esiste N,intorno di K_β,con $\bar{N} \in \Sigma$,tale che, $\gamma(\bar{N})= \gamma(K_\beta)$.

Esiste poi $L \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{N}_{\beta,L} \subset \bar{N}$ e quindi,considerati Φ_Le δ come previsto nel lemma 4.5,è possibile trovare $A \in \Sigma_{\ell+k}$tale che $A \subset M_{\beta+\delta}$.Allora:

$$\ell+k \leqslant \gamma(A) \leqslant \gamma(\Phi_L(A)) \leq \gamma(\Phi_L(A) \setminus \bar{N}_{\beta,L}) + \gamma(\bar{N}_{\beta,L}) < \ell + \gamma(K_\beta),$$

ove si è tenuto presente che $\Phi_L(A) \setminus \bar{N}_{\beta,L} \subset M_{\beta-\delta}$;Dunque $\gamma(K_\beta) \geqslant k+1$.

E' quasi superfluo notare,a questo punto,che il precedente teorema 4.7 consente di ottenere,come suo semplice corollario,il teorema 4.2;così l'obiettivo posto all'inizio del paragrafo è interamente raggiunto.

Bibliografia.

[1] Anderson,D.& G.Derrick,Stability of time-dipendent particle-like solutions in nonlinear field theories,
J.Math.Phys.11 1336-1346 (1970) e 12 945-952 (1971).

[2] Berestycki,H.& P.L.Lions, Existence d'ondes solitaires dans des problèmes non linéaires du type Klein-Gordon,
C.R.Acad.Sci.Paris,Sér. A,287 (1978) 503-506 e 288 (1979) 395-398.

[3] Berestycki,H. & P.L.Lions, Existence of a ground state in nonlinear equations of the type Klein-Gordon,
Variational Inequalities,Cottle,Gianessi-Lions ed.,New-York: J.Wiley 1979.

[4] Berestycki,H. & P.L.Lions, Une méthode locale pour l'existence de solutions positives de problèmes semi-linéaires elliptiques dans $\mathbb{R}^N$,
J.Anal.Math. 38 (1980) 144-187.

[5] Berestycki,H. & P.L.Lions, Nonlinear scalar field equations:I Existence of a Ground State; II Existence of infinitely many solutions,
Arch.Rat.Mec.Anal.,82 (4) (1983) 313-375.

[6] Berestycki,H., P.L.Lions & L.A.Peletier, An O.D.E. approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbb{R}^N$,
Ind.Univ.Math.J. 30 (1981) 141-157.

[7] Berger,M.S., On the existence and structure of stationary states for a nonlinear Klein-Gordan equation,
J.Funct.Anal. 9 (1972) 249-261.

[8] Coffman,C.V., Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u-u+u^3=0$ and a variational characterization of other solutions,
Arch.Rat.Mech.Anal. 46 (6) (1972) 81-95.

[9] Coleman,S.,Glazer,V. & A.Martin, Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations,
Comm.Math.Phys.,58 (2) (1978) 211-221.

[10] Esteban,M.J., Nonlinear elliptic problems in strip-like domains: symmetry of positive vortex rings,
Nonlinear Anal. T.M.A. 7 (4) 365-379 (1983).

[11] Esteban,M.J., & P.L.Lions, A compactness lemma,
Nonlinear Anal.T.M.A. 7 (4) 381-385 (1983).

[12] Fife,P.C., Asymptotic states for equations of reaction and diffusion,
Bull.A.M.S. 84 (5) 693-726 (1978).

[13] Fife,P.C., Mathematical aspects of reacting and diffusing systems,
Lect.Notes in Biomath. 28 Berlin Heidelberg New-York:Springer 1979.

[14] Fife,P.C. & L. A.Peletier, Nonlinear diffusion in population genetics,
Arch.Rat.Mech.Anal. 64 (2) 93-109 (1977).

[15] Finkelstein,R.,R.LeLevier & M.Ruderman, Nonlinear spinor fields,
Phys.Rev. 83 (1951) 326-332.

[16] Gidas,B.,W.M.Ni & L.Niremberg, Symmetry and related properties via the maximum principle,
Comm.Math.Phys. 68 (1979) 209-243.

[17] Krasnosel'skii,M.A., Topological methods in the theory of nonlinear integral equations,
New-York,MacMillan 1964.

[18] Lions,P.L., Principe de concentration-compacité en calcul des variations,
C.R.Acad.Sc.Paris,Sér.I 294 261-264 (1982).

[19] McLeod,K. & J.Serrin, Uniqueness of solutions of semilinear equations,
Proc.Nat.Acad.Sc. USA 78 6592-6595 (1981).

[20] Nehari,Z., On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics,
Proc.Roy.Irisch Acad. 62 117-135 (1963).

[21] Peletier,L.A. & J.Serrin, Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in $\mathbb{R}^N$,
Arch.Rat.Mech.Anal. 81 181-197 (1983).

[22] Pohožaev,S.I., Eigenfunctions of the equation $\Delta u+\lambda f(u)=0$,
Sov.Math.Doklady 5 1408-1411 (1965).

[23] Rabinowitz,P.H., Variational methods for nonlinear eigenvalue problems,
In Eigenvalues of nonlinear problems ,C.I.M.E.,Cremonese,
Roma 1974.

[24] Rabinowitz,P.H., Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems,
Ind.Univ.Math.J. 23 729-754 (1974)

[25] Ryder,G.H., Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations,
Pac.J.Math. 22 (3) 477-503 (1967).

[26] Sansone,G., Su un'equazione differenziale non lineare della fisica matematica,
Symp.Math. 6 5-139 (1970).

[27] Strauss,W.A., Existence of solitary waves in higher dimensions,
Comm.Math.Phys. 55 149-162 (1977).

[28] Struwe,M., Multiple solutions of differential equations without the Palais-Smale condition,
Math.Annal. 261 399-412 (1982).

[29] Synge,J.L., On a certain nonlinear differential equation,
Proc.Roy.Irish Acad. 62 17-41 (1961).

[30] Vainberg,M.M., Variational methods for the study of nonlinear operators,
S.Francisco:Holden Day,1964.