ISAS - INTERNATIONAL SCHOOL
FOR ADVANCED STUDIES

T E S I

DIPLOMA DI PERFEZIONAMENTO

"MAGISTER PHILOSOPHIAE"

PROBLEMI ELLITTICI IN ASSENZA DI COMPATTEZZA

CANDIDATA:

dott.ssa A. Canino

RELATORE:

Prof. A. Ambrosetti

Anno Accademico 1982/1983

TRIESTE

SSA - SCUOLA
ERNAZIONALE
SUPERIORE
TUDI AVANZATI
TRIESTE
Strada Costiera 11

PROBLEMI ELLITTICI IN ASSENZA DI COMPATTEZZA

INDICE

INTRODUZIONE

Negli ultimi anni molti studi sono stati fatti sui problemi di Dirichlet non lineari di tipo ellittico su Ω dominio aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

dove "g" è una funzione da $\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

e su tutto $\mathbb{R}^n$

$$-\Delta u = g(x,u) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{II})$$

Vogliamo descrivere condizioni che assicurino l'esistenza di soluzioni per entrambi i problemi.

A questo scopo è importante notare la relazione tra l'esistenza di soluzioni e la crescita di "g".

Diremo che "g" ha crescita sub-critica, critica o super-critica se, rispettivamente,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{g(u)}{u^p} = 0 \;;\; \lim_{u\to\infty} \frac{g(u)}{u^p} = 0 \;;\; \lim_{u\to\infty} \frac{g(u)}{u^p} = 0$$

dove $p = \frac{n+2}{n-2}$ é detto esponente "critico", perchè esponente limite rispetto all'immersione di Sobolev: l'applicazione i: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ non è più compatta.

Ovviamente, nei due diversi ambiti, Ω e $\mathbb{R}^n$ si hanno risultati diversi.

Consideriamo, per esempio, il problema $-\Delta u = u^p$ con $p \geq \frac{n+2}{n-2}$

In Ω non esistono soluzioni (cfr. [11]), invece in [4] e in [9] è dimostrata l'esistenza di soluzioni su tutto $\mathbb{R}^n$

Analizziamo, prima, il problema in un dominio aperto e limitato.

Se "g" ha un andamento sub-critico, con i metodi variazionali standard si dimostra facilmente l'esistenza di soluzioni (cfr. [1]).

D'altra parte, occorre considerare che l'identità di Pohozaev mostra che il problema (I) con $g(u) = u^{(n+2)/(n-2)}$ e Ω stellato, non ha soluzioni.

Ci si chiede cosa succeda perturbando la funzione $g(u) = u^{(n+2)/(n-2)}$ con un termine di ordine inferiore (per es. λ u).

E' chiaro che il problema (I) richiede particolari attenzioni: infatti, il funzionale - energia non soddisfa la condizione di Palais-Smale per la già osservata non compattezza dell'inclusione i: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$

In [5] è usato un metodo "diretto" dovuto originariamente ad Aubin nell'ambito della congettura di Yamabe.

Il risultato chiave è dovuto a Talenti (cfr. [14]) e concerne l'espressione delle funzioni che realizzano la migliore costante di Sobolev.

Da osservare è che in [5] i risultati dipendono dalla dimensione n dello spazio (il caso n=3 è diverso da quello n $\geq$ 4) e dal dominio

Sarebbe interessante capire la relazione tra la geometria di Ω e l'esistenza di soluzioni.

Quando il problema ellittico è studiato su tutto $\mathbb{R}^n$, il metodo più generalmente usato è quello di un approccio differenziale: per il risultato in [7] sulla simmetria radiale delle soluzioni positive del problema (I) il problema (II) viene ridotto al seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r} u' = g(u) & 0 < r < \infty \\ u(0) = \alpha ; \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

In [2], [3], [4], sono ottenuti risultati per tale problema sia nel caso di "g" con crescita sub-crtica, sia nel caso di "g" con crescita critica e super-critica.

Un caso interessante per il problema (II) è quello in cui $g(u)$ ha la seguente forma:

$$g(u) = K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)}$$

Con un metodo di confronto e di sopra e sotto - soluzioni si dimostra l'esistenza di infinite soluzioni positive limitate inferiormente (cfr. [9]).

Questa tesina è divisa in due parti.

Nella prima, dopo avere studiato la relazione tra la crescita di "g" e l'identità di Pohozaev e accennato brevemente al caso $p < (n+2)/(n-2)$ si studia il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \qquad \Omega = B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \\ u > 0 & \text{in } \Omega \qquad p = (n+2)/(n-2) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Si dimostrano essenzialmente i risultati contenuti in [5].

Inoltre si considera il problema: (cfr. [10])

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\ell u^p & \text{in } \Omega \qquad \Omega = B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \\ u > 0 & \text{in } \Omega \qquad 1 < p < [(n+2)+2\ell]/(n-2) \quad \ell > 0 \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Nella seconda parte si analizzano in dettaglio i risultati dovuti a Ni (cfr. [9]) sul problema:

$$-\Delta u = K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)} \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

e si studia il problema (II) nel caso di "g" con andamento critico e super-critico (cfr. [4]).

1. CONDIZIONI SULLA CRESCITA DI "g" ED IDENTITA' DI POHOZAEV

LEMMA 1.1 (Identità di Pohozaev)

Sia $u \in C^2_0(\Omega)$ e $g \in C(R)$ t.c.

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un dominio aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$

allora

$$n \int G(u) + \frac{2-n}{2} \int_\Omega u\, g(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_\nu^2 (x \cdot \nu)\, d\sigma$$

dove ν è la normale esterna unitaria in

$(\cdot)$ è il prodotto scalare euclideo in

u_ν è la derivata di u lungo ν

$G(u) = \int_0^u g(t)\, dt$

Da questo lemma segue facilmente il seguente teorema:

TEOREMA 1.2

Se Ω è stellato (in particolare $x \cdot \nu \geq 0 \ \forall x \in \partial\Omega$)

allora il problema:

$$\begin{cases} \Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali se $p < \frac{n+2}{n-2}$

Dimostrazione

Nel nostro vaso, l'identità di Pohozaev assume la seguente forma:

$$\frac{n}{p+1} \int_\Omega u^{p+1} + \frac{2-n}{2} \int_\Omega u^{p+1} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_\nu^2 (x \cdot \nu)\, d\sigma$$

Poichè $x \cdot \nu \geq 0$ in Ω , se esistono soluzioni non banali, si ha:

$$\frac{n}{p+1} + \frac{2-n}{2} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p \leq \frac{n+2}{n-2}$$

Ma, nel caso p= $\frac{n+2}{n-2}$, dall'identità di Pohozaev si avrebbe:

$\int_{\partial\Omega} u_\nu^2 \, (x \cdot \nu) \, d\sigma = 0$ ed essendo $x \cdot \nu \not\equiv 0$ si ha $u_\nu = 0$ cioè $u \equiv 0$ ∎

Se "g" non è una potenza pura, l'ipotesi $p < \frac{n+2}{n-2}$ non è sempre essenziale per l'esistenza di soluzioni.

Per esempio, possiamo considerare il caso di "g" uguale alla somma di due potenze, l'una delle quali con crescita maggiore della potenza "critica".

Si ha il seguente risultato: (cfr. [12]).

TEOREMA 1.3

Sia $n \geq 3$

Siano s, t, t. c. $1 < s < (n+2)/(n-2) < t$

Sia g= $u^s + u^t$ con $u \geq 0$ e g (-u) = - g (u)

Allora $\forall$ K $\in \mathbb{N}$, $\exists \ \bar{\lambda}_K$ t. c. $\forall \lambda \geq \bar{\lambda}_K$, il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un dominio aperto limitato di $\mathbb{R}^n$

possiede almeno K coppie distinte di soluzioni.

Consideriamo ora, il problema:

$$\begin{cases} \Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

dove Ω è un dominio aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Dal teorema di biforcazione di Rabinowitz ([13]) si può affermare che $\forall p > 1$ (quindi perfino per $p > (n+2)/(n-2)$) il problema ha una componente $\mathcal{C}$ di soluzioni che incontra (λ_1 , o) e che è illimitata in $\mathbb{R} \times L^{\infty}(\Omega)$
D'altra parte, applicando direttamente l'identità di Pohozaev troviamo che per $p > (n+2)/(n-2)$ tale problema non ha soluzione se $\lambda \leq \lambda^*$ dove λ^* è una costante positiva che dipende da Ω e da p.
Infatti:

$$\left(\frac{1-n}{2}\right)\int_{\Omega}(u^{p+1}+\lambda u) + n\int_{\Omega}\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}+\frac{\lambda u^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 > 0$$

e quindi:

$$\left(-1+\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1}\right)\int_{\Omega} u^{p+1} < \lambda\int_{\Omega} u^2$$

Ma u è soluzione di $\quad -\Delta u = u^p + \lambda u$:

$$\lambda_1\int_{\Omega} u^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} u^{p+1} + \lambda\int_{\Omega} u^2 < \lambda\left(-1+\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1}\right)^{-1}\int_{\Omega} u^2 + \lambda\int_{\Omega} u^2.$$

Così si ha: $\quad \lambda > \lambda_1 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot p - \frac{(n+2)/(n-2)}{p-1}$.

2. $p < (n+2)/(n-2)$

Per completezza esporremo in questo paragrafo alcuni risultati relativi al caso in cui la "g" ha una crescita sub-critica nei due diversi ambiti: Ω dominio aperto e limitato e tutto $\mathbb{R}^n$.

Per primo consideriamo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad (I)$$

Esporremo due teoremi, il primo in [6], il secondo in [1].

<u>TEOREMA</u> 2.1

Sia g una funzione reale localmente lipschitziana t.c.

$g(0) = 0$

$\varliminf_{u \to +\infty} g(u)u^{-1} > \lambda_1$

$\varlimsup_{u \to 0^+} g(u)u^{-1} < \lambda_1$

$\lim_{u \to +\infty} g(u)u^{-\ell} = 0$ con $\ell = \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$; $\ell < \infty$ se $n = 1,2$

$g(u)u^{-\ell}$ è non crescente per $u \geq 0$

allora esiste una soluzione del problema (I)

<u>TEOREMA</u> 2.2

Sia g una funzione reale localmente lipsichitziana t.c.

$g(0) = 0$

$|g(u)| \leq a_1 + a_2 |u|^\ell$ CON $1 < \ell < \frac{n+2}{n-2}$ per $n > 2$

$|g(u)| \leq a_3 \exp a(u)$ con $a(u)u^{-2} \longrightarrow 0$ per $n = 2$ e $u \longrightarrow \infty$

$g(u) = o(|u|)$ in $u = 0$

$g(u)u^{-1} \longrightarrow \infty$ per $u \longrightarrow \pm\infty$

$\exists\, \theta \in (0, 1/2),\ \exists\, u_0 > 0$ t.c. $\theta u g(u) - G(u) \geq 0$ per $u \geq u_0$

dove $G(u) = \int_0^u g(t)\, dt$

allora esiste una soluzione del problema (I).

Per quanto riguarda l'analogo problema in $\mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad n \geq 3 \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(II)}$$

risultati interessanti sono dovuti a Berestycki-P.L.Lions in [2]

TEOREMA 2.3

Sia g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c.

$g(0) = 0$

$\overline{\lim_{u \to +\infty}} \dfrac{g(u)}{u^\ell} \leq 0 \qquad \ell \leq \dfrac{n+2}{n-2}$

$-\infty < \underline{\lim_{u \to 0}} \dfrac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim_{u \to 0^+}} \dfrac{g(u)}{u} = -m < 0$

$\exists\, z > 0$ t.c. $G(z) > 0$ con $G(z) = \int_0^z g(t)\, dt$

allora esiste una soluzione positiva per il problema (II).

Se inoltre,

g è dispari

allora esiste una successione $\{u_k\}_{k \geq 1}$ di soluzioni distinte non banali del problema (II) con le seguenti proprietà:

i) u_k è radialmente simmetrica e di classe C^2

ii) $\exists\, C_k, \delta_k > 0$ t.c. $|D^\alpha u_k(x)| \leq C_k e^{-\delta_k |x|} \quad \forall\, |x| \geq 1 \quad \forall\, |\alpha| \leq 2$

iii) $\lim_{k \to +\infty} S(u_k) = +\infty \qquad S(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} G(u)\, dx$

Altri risultati si trovano in [3] e [4].

3. $-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda u$

Abbiamo notato nei due paragrafi precedenti l'esistenza di un netto contrasto tra il caso $p < (n+2)/(n-2)$ e il caso $p = (n+2)/(n-2)$ Studiamo, allora, seguendo [5] il caso della funzione $g(u) = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ più un termine di ordine inferiore.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \qquad p = \frac{n+2}{n-2} \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{I}$$

$$\Omega = B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

Prima di tutto, deriviamo semplicemente due risultati di non esistenza:

<u>TEOREMA</u> 3.1

Se $\lambda > \lambda_1$ allora non esistono soluzioni di (I)

Dimostrazione

Sia u una soluzione di (I). Allora:

$$-\int_\Omega (\Delta u)\varphi_1 = \int_\Omega u\,\varphi_1 = \int_\Omega u^p \varphi_1 + \lambda \int_\Omega u\,\varphi_1 > \lambda \int_\Omega u\,\varphi_1$$

Così $\lambda_1 > \lambda$ ∎

<u>TEOREMA</u> 3.2

Se $\lambda \leq 0$ allora non esistono soluzioni di (I)

Dimostrazione

Segue dall'identità di Pohozaev:

$$\lambda \int_\Omega u^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2$$

Se $\lambda < 0 \Rightarrow u \equiv 0$

Se $\lambda = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$ e $0 = -\int_\Omega \Delta u = \int_\Omega u^p \Rightarrow u \equiv 0$ ∎

Il risultato precedente dipende ovviamente dalla geometria di Ω

Infatti in [8] si dimostra che se Ω è un anello, allora esiste una soluzione del problema (I) $\forall\ \lambda \in (-\infty, \lambda_1)$.

Consideriamo, allora, il seguente funzionale

$$\Psi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 \qquad \Psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Vogliamo trovare i suoi punti critici sulla sfera: $\|u\|_{p+1} = 1$

cioè quei punti $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\Psi'(u) = 0$ e $\phi(u) = 0$

dove $\phi(u) = 1 - \|u\|_{p+1}$

Tali punti soddisfano la seguente identità:

$$\Psi'(u) = \frac{\langle \Psi'(u), \phi'(u) \rangle}{\|\phi'(u)\|^2}\, \phi'(u)$$ cioè:

$$-\Delta u - \lambda u = \mu u^p$$

(μ è un moltiplicatore di Lagrange)

Essi quindi costituiscono le soluzioni del problema (I).

Per dimostrare l'esistenza di punti critici per il funzionale $\Psi(u)$,

usiamo un metodo "diretto", cioè proviamo che:

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_{p+1} = 1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 \quad \text{è assunto} \qquad (3.3)$$

Adesso, richiamiamo un importante risultato dovuto a Talenti (cfr. [14]) che avrà un ruolo fondamentale nella dimostrazione di (3.3).

TEOREMA 3.4

Sia u una funzione a valori reali definita su $\mathbb{R}^n$, liscia e che decade abbastanza velocemente all'infinito.

Sia p t.c. $1 < p < n$, allora:

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx\right\}^{1/q} \le C \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right\}^{1/p} \qquad q = \frac{np}{n-p} \qquad (3.5.)$$

Il segno di eguaglianza in (3.5) vale se u è della forma:

$$u(x) = [a + b|x|^{\frac{p}{p-1}}]^{1-\frac{n}{p}} \quad \text{dove} \quad |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \; ; \; a, b > 0$$

Definiamo, ora:

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_{p+1} = 1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega u^2$$

$$S = \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_{p+1} = 1}} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

S corrisponde alla migliore costante per l'immersione di Sobolev: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$

Infatti da questa immersione si ha:

$$\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow C \geq \frac{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}$$

Nel nostro caso la migliore costante è

$$C = \sup \frac{1}{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{\inf \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}$$

Per dimostrare (3.3), usiamo il seguente lemma di Lieb:

<u>LEMMA</u> 3.6

Se $S_\lambda < S$ allora $\inf\limits_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_{p+1} = 1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega u^2$ è assunto

Dobbiamo, dunque, dimostrare che per opportuni λ si ha $S_\lambda < S$

Consideriamo, separatamente, i casi $n = 3$ e $n \geq 4$.

$$\Omega = B_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \}$$

Caso $n = 3$

LEMMA 3.7

$$S_\lambda < S \qquad \forall \lambda > \frac{\lambda_1}{4}$$

Dimostrazione

Valuteremo il rapporto:

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_6^2}$$

con $$u(x) = u_\varepsilon(r) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (r = |x|,\ \varepsilon > 0)$$

con $$\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega) \qquad \text{t.c.}$$

$$\varphi(0) = 1 \ ; \ \varphi'(0) = 0 \ ; \ \varphi(1) = 0$$

Indichiamo con ω l'area di S_2.

Calcoliamo l'espressioni di: $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$ — $\|u_\varepsilon\|_2^2$ — $\|u_\varepsilon\|_6^2$

1) $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \left[\frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)} - \frac{2r\varphi(r)\varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^2} + \frac{r^2 \varphi^2(r)}{(\varepsilon + r^2)^3} \right] r^2\, dr$$

Integrando per parti, si ha:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2\, dr + 3\omega\varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2\, dr$$

Poichè $\varphi(0) = 1$ è $\varphi'(0) = 0$, si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)} r^2\, dr = \int_0^1 |\varphi'(r)|^2\, dr + O(\varepsilon)$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi^2(r)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2\, dr = \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

Inoltre:

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3}\, dr = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds + O(1)$$

Quindi, l'espressione finale per $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$ è la seguente:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{1/2}} + \omega \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

dove

$$K_1 = 3\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds$$

Inoltre, si osserva che:

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dx$$

dove

$$U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)}.$$

2) $\|u_\varepsilon\|_2^2$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)\, r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr = \omega \int_0^1 \varphi^2(r)\, dr + O(\varepsilon^{1/2})$$

3) $\|u_\varepsilon\|_6^2$

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 = \omega \int_0^1 \frac{\varphi^6(r)}{(\varepsilon+r^2)^3} r^2 dr = \omega \int_0^1 \frac{[\varphi^6(r)-1]}{(\varepsilon+r^2)^3} r^2 dr + \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon+r^2)^3} dr$$

Usando $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$ si ha:

$$\left| \int_0^1 \frac{[\varphi^6(r)-1]}{(\varepsilon+r^2)^3} r^2 dr \right| \le C \int_0^1 \frac{r^4}{(\varepsilon+r^2)^3} dr = O(\varepsilon^{-1/2})$$

Quindi:

$$\|u_\varepsilon\|_6^6 = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\left[\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds\right] + O(\varepsilon) \qquad \text{e}$$

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 = \frac{K}{\varepsilon^{1/2}} + O(\varepsilon^{1/2})$$

con $K_2 = \left[\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds\right]^{1/3}$ ed anche $K_2 = \|U\|_6^2$.

Allora, abbiamo l'espressione finale per il rapporto $Q_\lambda(u_\varepsilon)$:

Osservando che $\frac{K_1}{K_2} = S$ e scegliendo $\varphi(r) = \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right)$ si ha:

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + \left(\frac{\pi^2}{4} - \lambda\right) C \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \qquad \text{con} \quad C > 0$$

Per avere $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ basta scegliere un ε piccolo opportuno. ∎

LEMMA 3.8

Se $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$ allora non esiste soluzione del problema (I)

Dimostrazione

Se esiste una soluzione u del problema, essa per il risultato di Gidas-Ni-Niremberg (cfr. [7]) deve essere radialmente simmetrica.

Quindi, possiamo scrivere $u(x) = u(r) \qquad (r = |x|)$

e $u(r)$ soddisfa:

$$\begin{cases} -u'' - \frac{2}{r} u' = u^5 + \lambda u & \text{su } (0,1) \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ed anche:

$$\int_0^1 u^2 \left(\lambda \psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) r^2 \, dr = \frac{2}{3}\int_0^1 u^6 (r\psi - r^2\psi')\, dr + \frac{1}{2}|u'(1)|^2 \psi(1)$$

con $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e t.c. $\psi(0) = 0$

Per i risultati precedenti, possiamo supporre:

$$0 < \lambda \leq \frac{\lambda_1}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

Scegliamo $\psi(r) = \operatorname{sen}(\sqrt{4\lambda}\, r)$

Abbiamo:

$$\int_0^1 u^2 \left(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi'''\right) r^2 \, dr = 0$$

$$\int_0^1 u^6 (r\psi - r^2\psi')\, dr > 0 \qquad \text{su } [0,1]$$

$$\psi(1) \geq 0$$

Otteniamo, cosi, un assurdo. ∎

Caso $n \geq 4$

LEMMA 3.9

$$S_\lambda < S \qquad \forall \lambda > 0$$

Dimostrazione

Valutiamo il rapporto:

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{p+1}^2}$$

con $u(x) = u_\varepsilon(r) = \dfrac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{(n-2)/2}}$ $\qquad (r = |x|,\ \varepsilon > 0)$

dove φ è una funzione fissata t.c.

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in U_0$ (U_0 intorno dello 0)

$\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(1) = 0$

Indichiamo con ω_n l'area di S_{n-1}

1) $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega_n \int_0^1 \left[\frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}} - \frac{2(n-2)\, r\, \varphi(r)\, \varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{n-1}} + \frac{(n-2)^2 r^2 \varphi^2(r)}{(\varepsilon + r^2)^n} \right] r^{n-1}\, dr$$

Integrando per parti, il secondo termine del membro di destra, si ha:

$$2 \int_0^1 \frac{\varphi(r)\, \varphi'(r)}{(\varepsilon + r^2)^{n-1}}\, r^n\, dr = \int_0^1 \varphi^2(r) \left[\frac{n\, r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{n-1}} - \frac{2(n-1)}{(\varepsilon + r^2)^n}\, r^{n+1} \right] dr$$

Quindi:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega_n \int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}}\, r^{n-1}\, dr + n(n-2)\,\omega_n\, \varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)}{(\varepsilon + r^2)^n}\, r^{n-1}\, dr =$$

$$= \omega_n \int_0^1 \frac{|\varphi'(r)|^2}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}}\, r^{n-1}\, dr + n(n-2)\,\omega_n\, \varepsilon \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^n}\, dr +$$

$$+ n(n-2)\,\omega_n\, \varepsilon \int_0^1 \frac{|\varphi^2(r) - 1|}{(\varepsilon + r^2)^n}\, r^{n-1}\, dr =$$

$$= O(1) + K_1\, \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} + O(\varepsilon) = K_1\, \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} + O(1).$$

dove $\quad K_1 = n(n-2)\,\omega_n \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(1+s^2)^n}\, ds$

Osserviamo che posto $\quad U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{(n-2)/2}}$, si ha: $K_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx$

Infattti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}\, dx = \omega_n (n-2) \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}\, dr$$

Usiamo la seguente formula integrale:

$$\int \frac{x^m}{(x^2+1)^n}\, dx = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)(x^2-1)^{n-1}} + \frac{(m-1)}{(2n-m-1)} \int \frac{x^{m-2}}{(x^2+1)^n}\, dx$$

Troviamo:

$$\int \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}\, dr = \frac{n}{(n-2)} \int \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n}\, dr$$

2) $\quad \|u_\varepsilon\|_2^2$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega_n \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)}{(\varepsilon+r^2)^{n-2}}\, r^{n-1}\, dr = \omega_n\, \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varphi^2(\sqrt{\varepsilon}\, s)}{(1+s^2)^{n-2}}\, s^{n-1}\, ds$$

Se $n \geq 5$, $\quad \omega_n\, \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varphi^2(\sqrt{\varepsilon}\, s)}{(1+s^2)^{n-2}}\, s^{n-1}\, ds = K\, \varepsilon^{2-\frac{n}{2}}$

Se $n=4$, sfruttando la diseguaglianza: $\frac{\varphi^2(\sqrt{\varepsilon}\, s)}{(1+s^2)^{n-2}}\, s^{n-1} \leq \frac{K}{(1+s)}$,

si ha:

$$\omega_n\, \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varphi^2(\sqrt{\varepsilon}\, s)}{(1+s^2)^{n-2}}\, s^{n-1}\, ds \leq K \log(1 + 1/\sqrt{\varepsilon})$$

3) $\quad \|u_\varepsilon\|_{p+1}^2$

$$\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2 = \omega_n \int_0^1 \frac{\varphi(r)^{2n/(n-2)}}{(\varepsilon+r^2)^n}\, r^{n-1}\, dr = \omega_n \int_0^1 \frac{|\varphi(r)^{2n/(n-2)} - 1|}{(\varepsilon+r^2)^n}\, r^{n-1}\, dr +$$

$$+ \omega_n \int_0^1 \frac{r}{(\varepsilon+r^2)^n}\, dr \geq O(1) + \tilde{K}_2\, \varepsilon^{-n/2}$$

Quindi:

$$\|u_\varepsilon\|^2_{p+1} \geq \left(\tilde{K}_2\, \varepsilon^{-n/2} + O(1)\right)^{(n-2)/n} \geq K_2\, \varepsilon^{(2-n)/2} + O(1)$$

dove

$$K_2 = \left[\omega_n \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(1+s^2)^n}\right]^{(n-2)/n}$$

Osserviamo che $K_2 = \|U\|_6^2$

Valutiamo, ora, $Q_\lambda(u_\varepsilon)$ nel caso $n \geq 5$ (per $n=4$, il risultato è identico)

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{K_1\, \varepsilon^{(2-n)/2} + O(1) - \lambda K\, \varepsilon^{(4-n)/2}}{K_2\, \varepsilon^{(2-n)/2} + O(1)} = \frac{K_1}{K_2} - \lambda C \varepsilon$$

Il risultato segue scegliendo ε piccolo ed osservando che $\frac{K_1}{K_2} = S$ ■

Possiamo, ora, dimostrare il risultato finale:

<u>TEOREMA</u> 3.10

Se Ω è una palla in $\mathbb{R}^n$ allora esiste una soluzione del problema (I)

se e solo se $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$ per $n=3$

se e solo se $\lambda \in (0, \lambda_1)$ per $n \geq 4$

Dimostrazione

E' analoga in entrambi i casi.

Per $n=3$ [risp. $n \geq 4$] quando $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$ [risp. $\lambda \in (0, \lambda_1)$], dal lemma 3.7 [risp.3.9] discende che esistono punti di minimo per il funzionale Ψ

Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ un tale punto di minimo.

Allora, per la regola dei moltiplicatori di Lagrange:

$$-\Delta u = \lambda u + S_\lambda u^p \quad \text{in } \Omega$$

con $S_\lambda > 0$ perchè $\lambda < \lambda_1$

La funzione $K u$ soddisfa il problema (I) con $K = S_\lambda^{1/(p-1)}$

Per il principio del massimo, $u>0$ in Ω ■

Accenneremo, ora, brevemente ad una generalizzazione del problema (I) (cfr. [5]).

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u>0 & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

dove Ω è un dominio aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $p=(n+2)/(n-2)$

$f(x,u): \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1) f è misurabile in x e continua in u

2) $\sup\limits_{\substack{x\in\Omega \\ 0\le u\le M}} |f(x,u)| < \infty \qquad \forall M>0$

3) $f(x,0)=0$

4) $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f(x,u)}{u^p} = 0$

Il risultato che si ottiene, utilizzando una variante del teorema di mountain-pass (cfr. [1]) senza la condizione di Palais -Smale, è il seguente

<u>TEOREMA</u> 3.11

1) Sia $f(x,u) = a(x)u + h(x,u)$ con

2) $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ e

3) $h(x,u) = o(u)$ per $u \to 0^+$ uniformemente in x

4) $h(x,u) = o(u^p)$ per $u \to +\infty$ uniformemente in x

5) $f(x,u)=0 \qquad x\in\Omega,\ u\le 0$

Supponiamo che l'operatore $-\Delta - a(x)$ ha il suo primo autovalore positivo, cioè: $\int_\Omega |\nabla\phi|^2 - a\,\phi^2 \geq \alpha \int \phi^2 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \alpha>0$ (3.12)

e che sia verificata la seguente condizione:

$\exists\, v_0 \in H_0^1(\Omega),\ v_0 \geq 0$ in Ω t.c. $v_0 \not\equiv 0$ e $\sup\limits_{t\geq 0} \Psi(tv_0) < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$ (3.13) dove $\Psi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} - F(x,u)\right]$ con $u \in H_0^1(\Omega)$

allora il problema (II) ha una soluzione.

E' facile notare che nel caso considerato precedentemente, cioè, $f(x,u) = \lambda u$ la condizione (3.12) corrisponde a $\lambda < \lambda_1$ e la condizione (3.13) a $S_\lambda < S$.

Fortunatamente, abbiamo una condizione sufficiente perchè la funzione $f(x,u)$ soddisfi la (3.13):

<u>PROPOSIZIONE</u> 3.14

Supponiamo che la funzione $f(x,u)$ soddisfi le ipotesi 1)-4) del teorema 3.11 ed inoltre esista $\tilde{f}(u)$ t.c. $f(x,u) \geq \tilde{f}(u) \geq 0$ per q.o. $x \in \omega$, $\forall u \geq 0$

dove $\omega \neq \phi$ è un insieme aperto contenuto in Ω

Supponiamo che $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$ soddisfi:

$$\lim \varepsilon \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} F\left[\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{(1+s^2)}\right)^{(n-2)/2}\right] s^{n-1}\,ds = \infty$$

allora la condizione (3.13) è verificata.

Per riassumere i risultati che si ottengono nei due diversi casi $n \geq 4$ e $n=3$ possiamo più semplicemente considerare il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \mu u^q & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

dove Ω è un dominio aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$; $p = \frac{n+2}{n-2}$; q è t.c $1 < q < p$ e $\mu > 0$

Per $n \geq 4$, il problema (III) ha una soluzione $\forall \mu > 0$

Per $n = 3$, se $3 < q < 5$ esiste una soluzione $\forall \mu > 0$

se $1 < q \leq 3$ esiste una soluzione solo per μ molto grande.

4. CASO $g(u) = |x|^\ell u^p$ NELLA SFERA

Anche in questo paragrafo,ci occuperemo di funzioni con crescita critica o super-critica.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\ell u^p & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\Omega = B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

Abbiamo il seguente risultato dovuto a Ni: (cfr.[10])

TEOREMA 4.1

Se $\ell > 0$ e $p \in (1, (n+2+2\ell)/(n-2))$ allora il problema ammette soluzione

La dimostrazione si basa sui metodi variazionali standard.

Si definisce il funzionale:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |x|^\ell F(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

con $$F(u) = \int_0^u |t|^p\, dt = \begin{cases} \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} & u \geq 0 \\ \frac{-1}{p+1}|u|^{p+1} & u < 0 \end{cases}$$

Si applica a tale funzionale il teorema di mountain-pass.

Per dimostrare la condizione di Palais-Smale,si usa il seguente lemma di compattezza:

LEMMA 4.2

L'applicazione $u \longrightarrow |x|^m \cdot u$ da $H^1(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ è compatta per $p \in [1, \tilde{m})$ dove $$\tilde{m} = \begin{cases} \frac{2n}{n-2-2m} & \text{se } m < (n-2)/2 \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le altre ipotesi del teorema di mountain-pass discendono facilmente dalle condizioni su ℓ e p edal seguente lemma radiale:

LEMMA 4.3

Sia u una funzione radialmente simmetrica di Ω (palla unitaria in $\mathbb{R}^n$)

con $u(1) = 0$

Allora $|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\omega_n (n-2)}} \frac{|\nabla u|_{L^2(\Omega)}}{|x|^{(n-2)/2}}$ dove ω_n è l'area di Ω

Un'applicazione immediata del teorema 4.1 si ha quando si voglia considerare il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'' + \frac{(n-1)}{r} u' + r^{\ell} u^{(n+2)/(n-2)} = 0 \\ u'(0) = 0 \quad ; \quad u(0) = a > 0 \end{cases}$$

Per l'unicità e per il risultato precedente, ogni soluzione di tale problema deve annullarsi in qualche punto.

Il teorema 4.1 può essere facilmente generalizzato al caso:

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|) f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega = B_1$; $b(r)$ e $f(u)$ t.c.

1) $b(r)$ è una funzione localmente hölderiana t.c.

$b(0) = 0$, $b(r) \geq 0$, $b \not\equiv 0$ in Ω ; $b(r) = O(r^{\ell})$ in $r = 0$, $\ell > 0$

2) $f(u)$ è una funzione localmente hölderiana t.c.

$f(u) \geq 0 \quad \forall u > 0$; $f(u) = o(u)$ in $u = 0$; $f(u) u^{-1} \to \infty$ per $u \to \infty$

$|f(u)| \leq c(1 + |u|)^p$ con $p < ((n+2)/(n-2) + 2\ell/(n-2))$ per u grande

$\exists\ \theta \in (0, 1/2)$, $M > 0$ t.c. $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt \leq \theta \cdot u f(u)$ per $u \geq M$

5. $\Delta u + K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)}$ IN $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo ci occuperemo del problema "critico" in tutto $\mathbb{R}^n$

In particolare, seguendo [9], studieremo l'esistenza di soluzioni positive per il problema $\Delta u + K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ in $\mathbb{R}^n$

Il risultato principale è il teorema 5.1 che nel caso particolare $K \geq 0$, assicura l'esistenza di infinite soluzioni positive non solo limitate inferiormente ma anche tendenti all'infinito verso una costante strettamente positiva.

La dimostrazione, prima descritta nel caso di $K(x)$ funzione radiale, si avvale del principio del massimo, del metodo delle sopra e sotto-soluzioni e di alcune funzioni confronto.

Si ottengono, inoltre, delle stime a priori sulle soluzioni utilizzando delle funzioni "medie" di u e $K(x)$

Tali stime a priori permettono di ottenere risultati di non esistenza.

Infine, si studia il caso di $K(x)$ funzione simmetrica radialmente trovando, in particolare, che se $K(x)$ è una funzione non negativa e non crescente il problema ha infinite soluzione positive simmetriche radialmente.

<u>TEOREMA</u> 5.1

Sia $K(x)$ una funzione limitata e localmente hölderiana in $\mathbb{R}^n$

i) Se $m \geq 3$ e $|K(x_1, x_2)| \leq \dfrac{C}{|x_2|^{\ell}}$ per $|x_2|$ grande, uniformemente in $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ con $C > 0$ e $\ell > 2$

allora il problema $\Delta u + K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ (I)

possiede infinite soluzioni positive limitate e t.c. ognuna di esse è limitata inferiormente da una costante positiva.

ii) a) Se $K(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ oppure

b) Se $K(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

allora il problema (I) possiede infinite soluzioni positive, limitate e t.c. ognuna di esse è limitata inferiormente da una costante positiva e tende ad una costante positiva all'infinito nella direzione x_2

Dimostriamo il teorema prima nel caso in cui $K \geq 0$ e $m = n$

Diamo i seguenti lemmi di confronto:

LEMMA 5.2

Sia $a \in (0; (n-2)/4)$ e $\tilde{K}(r) = \frac{2a}{(1+r^2)^{1-[4a/(n-2)]}} \left[n - \frac{2(a+1)}{(1+r^2)} r^2 \right]$

allora $V_\alpha(r) = \frac{\alpha}{(1+r^2)^a}$ è una soluzione con $\frac{\tilde{K}(r)}{\alpha^{4/(n-2)}}$ al posto di $K(r)$

di:

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + K(r) u^{(n+2)/(n-2)} = 0 \text{ in } [0,\infty) \\ u(0) = \alpha \quad ; \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

LEMMA 5.3

Sia $a \in (0; (n-2)/4)$ e $0 \leq K(r) \leq \frac{2a(n-2-2a)}{(1+r^2)^{a+1}} \quad \forall r > 0$

allora $\forall \alpha \in (0,1]$ esiste una soluzione di (II) positiva e non crescente e t.c. $u - V_\alpha$ è non decrescente e tende ad un limite positivo all'infinito.

Possiamo, adesso, con l'intento di costruire una sopra-soluzione, dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 5.4

Sia $K(r)$ una funzione non negativa radialmente simmetrica e localmente hölderiana in $\mathbb{R}^n$ con

$K(r) \leq \frac{C}{r^l}$ all'infinito con $C > 0$ e $l > 2$

allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall \alpha \in (0, \delta]$ il problema (II) ha una soluzione positiva

u in $[0,\infty)$ t.c. u è non crescente e per $r \to \infty$ tende ad una costante positiva.

Dimostrazione

Senza ledere la generalità, possiamo supporre ℓ vicino a 2 in modo che definendo $a = (\ell-2)/2$ si ha $a \in (0\,;\,(n-2)/4)$.

In questo modo, possiamo applicare i lemmi 5.2 e 5.3.

Per ipotesi, si ha: $K \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$ e $K(r) \leq \frac{c}{r^\ell}$ per $r \to \infty$

quindi $\exists\, K > 0$ t.c. $0 \leq K(r) \leq \frac{K}{r^\ell}$ $\forall\, r \geq 0$

Allora possiámo trovare $c_\ell > 0$ t.c.

$$\frac{K(r)}{c_\ell} \leq \frac{2a(n-2-2a)}{(1+r^2)^{1+a=\ell/2}}$$

Possiamo applicare il lemma 5.3. alla funzione $K(r)/c_\ell$

Abbiamo: $\forall\, \beta \in (0,1]$ esiste una soluzione ω_β positiva e non crescente di:

$$\begin{cases} \omega'' + \frac{n-1}{r}\,\omega' + K(r)/c_\ell\,\omega^\sigma = 0 & \sigma = (n+2)/(n-2) \\ \omega(0) = \beta \;; \quad \omega'(0) = 0 \end{cases}$$

Ovviamente, $\lim\limits_{r\to\infty} \omega_\beta(r) > 0$

Infatti, dal lemma 5.3 si ha che $\lim\limits_{r\to\infty} u - v_\alpha = e > 0$

Se fosse $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = 0$ si avrebbe $\lim\limits_{r\to\infty} u - v_\alpha = -M$ Assurdo!

Poniamo $\delta = 1/c_\ell^{\,1/\sigma-1}$

Dimostriamo che δ verifica la tesi del teorema.

Sia $\alpha = \delta\cdot\beta$ (ricordiamo che $\beta \in (0,1]$) allora $\alpha \in (0,\delta]$

$\forall\, \beta \in (0,1]$, consideriamo $u_\alpha = \delta\cdot\omega_\beta$ (cioè $\forall\, \alpha \in (0,\delta]$)

Dimostriamo che u_α risolve il problema (II).

$$u''_\alpha + \frac{n-1}{r}\,u'_\alpha + K(r)\,u_\alpha^\sigma = \delta\left[\omega''_\beta + \frac{n-1}{r}\,\omega'_\beta + \frac{K(r)}{c_\ell}\,\omega_\beta^\sigma\right] = 0$$

Inoltre $u_\alpha(0) = \delta\cdot\omega_\beta(0) = \delta\cdot\beta = \alpha$; u_α è non crescente e

$\lim\limits_{r\to\infty} u_\alpha(r) = \delta \lim\limits_{r\to\infty} \omega_\beta(r) > 0$ ∎

Adesso,basta ricordare il seguente risultato:

<u>TEOREMA</u> 5.5

Supponiamo che ϕ è una sopra-soluzione e ψ una sotto-soluzione con $\phi \geqslant \psi$ in $\mathbb{R}^n$ di $Lu + f(x,u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$

dove L è un operatore del secondo ordine uniformemente ellittico ed f

è una funzione localmente hölderiana e localmente lipschitziana

in u

allora esiste una soluzione u in $\mathbb{R}^n$ con $\phi \geqslant u \geqslant \psi$

Ritorniamo alla dimostrazione del teorema 5.1

<u>Dimostrazione teo.5.1 (ii-a) m=n</u>

Dalle ipotesi su $K(x)$,possiamo scegliere una funzione K_1 t.c. K_1 è non negativa,radialmente simmmetrica,liscia e t.c. $K(x) \leq K_1(|x|)$ e

$K_1(r) \leq C/r^\ell$ all'infinito con $C>0$ e $\ell > 2$

Applichiamo il teorema 5.4

Esiste $\delta > 0$ t.c. il problema:

$$\begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' + K_1(r)\, v^{(n+2)/(n-2)} = 0 & r > 0 \\ v(0) = \alpha \quad ; \quad v'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

ha una soluzione positiva

Costruiamo,ora,una sopra-soluzione del nostro rpoblema.

Sia u_1 la soluzione di (III) con $u_1(0) = \alpha_1$, $\alpha_1 \in (0,\delta]$

Sappiamo che u_1 è monotonicamente non crescente e t.c. $\lim_{r\to\infty} u_1 = \beta_1 > 0$

D'altra parte:

$$\Delta u_1 + K(x)\, u_1^{(n+2)/(n-2)} = -K_1(r)\, u_1^{(n+2)/(n-2)} + K(x)\, u_1^{(n+2)/(n-2)} =$$
$$= \left(K(x) - K_1(r)\right) u_1^{(n+2)/(n-2)} \leq 0$$

allora u_1 è una sopra-soluzione del problema (I) e $u_1 \geqslant \beta_1$

Costruiamo una sotto-soluzione.

Sia $v_1 = \beta_1 > 0$

$$\Delta v_1 + K(x) v_1^{(n+2)/(n-2)} = K(x) \cdot \beta_1^{(n+2)/(n-2)} \geq 0$$

Quindi v_1 è una sotto-soluzione del problema (I) e $u_1 \geq v_1$

Adesso, si può applicare il teorema 5.5 e concludere che esiste una soluzione del problema (I) t.c.

$$u_1 \geq u \geq v_1 \geq \beta_1 > 0$$

Poichè $\lim\limits_{r \to \infty} u_1(r) = \beta_1$,si ha: $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = \beta_1$

Abbiamo trovato una soluzione positiva e limitata del problema (I) che ha un limite positivo all'infinito.

Per trovarne un'altra basta partire con la soluzione positiva u_2 t.c.

$u_2(0) = \alpha_2$ con $\alpha_2 \in (0, \beta_1)$.

In questo modo si ottengono infinite soluzioni limitate,positive e con un limite positivo all'infinito. $\blacksquare$

Consideriamo,ora,la funzione $K(x)$ senza restrizione sul segno.

Questa volta dobbiamo trovare un metodo che ci consenta di costruire le sotto-soluzioni,che nel caso precedente erano costituite semplicemente dalle costanti.

Diamo,ancora,un lemma di confronto:

<u>LEMMA</u> 5.6

Sia u in $[0, \varepsilon)$ una soluzione positiva di:

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' - K(r) u^{\sigma} = 0 \\ u(0) = \alpha \ ; \ u'(0) = 0 \end{cases} \qquad \sigma = (n+2)/(n-2) \qquad (5.7)$$

e v in $[0, \infty)$ una soluzione positiva di:

$$\begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' - \tilde{K}(r)\, v^{\sigma} = 0 & \sigma = (n+2)/(n-2) \qquad (5.8) \\ v(0) = \tilde{\alpha} \geq \alpha \quad ; \quad v'(0) = 0 \end{cases}$$

dove $\tilde{K} \geq K \geq 0$ e $\sigma = (n+2)/(n-2)$

Allora u in $[0,\infty)$ si può estendere ad una soluzione positiva di (5.7)

e $u \leq v$ in $[0,\infty)$

Inoltre $u - v$ è non crescente per $r > 0$

Dimostrazione teo.5.1 (i) (m=n)

Per le ipotesi su K, troviamo una funzione $K_1(r)$ t.c.

$K_1(r) \geq 0 \quad \forall r \geq 0$ e t.c. $|K(x)| \leq K_1(|x|) \leq C/|x|^{\ell}$ con $C>0$ e $\ell > 2$

Applicando il teorema 5.4 si ha che esiste $\delta > 0$ t.c. $\forall \alpha \in (0,\delta]$

il problema:

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + K_1(r)\, u^{\sigma} = 0 & \sigma = (n+2)/(n-2) \qquad (5.9) \\ u(0) = \alpha \quad ; \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione positiva u in $[0,\infty)$ con $u(r)$ non crescente e

$$\lim_{r \to \infty} u(r) > 0$$

Sia u_1 la soluzione con valore iniziale δ.

u_1 è una sopra-soluzione del problema (I) e $\lim_{r\to\infty} u_1(r) = \beta > 0.$

Quindi: $u_1 \geq \beta$

Costruiamo, ora, una sotto-soluzione u_2 del problema (I)

con $u_1 > u_2 \geq \rho > 0$ e $\rho > 0$

Sia $\gamma = \beta/2$ e $\tilde{u}_1$ soluzione di (5.9) con $\tilde{u}_1(0) = \gamma$

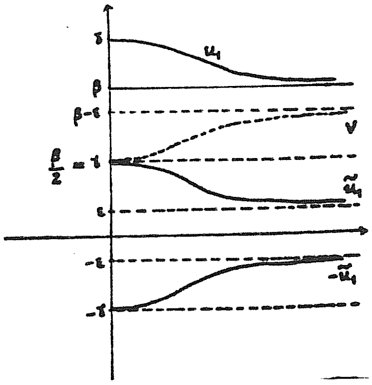
Poniamo $v = -\tilde{u}_1 + 2\gamma$

$$\tilde{u}_1(r) \leq \gamma \leq v(r) \leq 2\gamma - \varepsilon = \beta - \varepsilon < \beta$$ e

$$\Delta v = -\Delta \tilde{u}_1 = K_1(r)\, \tilde{u}_1^{\sigma}$$

Così, definendo $\tilde{K}(r) = \dfrac{K_1(r)\, \tilde{u}_1^{\sigma}}{v^{\sigma}} = K_1(r) \left(\dfrac{\tilde{u}_1}{v}\right)^{\sigma}$,

v soddisfa:



$$\begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' - \tilde{K}(r) v^{\sigma} = 0 \\ v(0) = \gamma \quad ; \quad v'(0) = 0 \end{cases}$$

Ovviamente,si ha: $K_1(r) \geq \tilde{K}(r) \geq \eta \cdot K_1(r)$ con $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\sigma}$ e $\eta < 1$

Applicando il lemma 5.6,otteniamo l'esistenza di ω soluzione positiva in $[0,\infty)$ con $\omega \leq v$ di:

$$\begin{cases} \omega'' + \frac{n-1}{r} \omega' - \eta K_1(r) \omega^{\sigma} = 0 \\ \omega(0) = \gamma \quad ; \quad \omega'(0) = 0 \end{cases}$$

In particolare $\omega < \beta$

Per evitare η ,poniamo $u_2 = \lambda\omega < \omega < \beta \leq u_1$

$$u_2(r) \geq u_2(0) = \lambda\,\omega(0) = \lambda\,\gamma > 0 \quad \forall\, r \geq 0 .$$

Facilmente,si vede che u_2 è una sotto-soluzione di (I).

Quindi,applicando il teorema 5.5 si ha l'esistenza di una soluzione u t.c. $S \geq u \geq \lambda\gamma > 0$

Ripetiamo il ragionamento partendo da una funzione con valore iniziale

$\alpha \in (0, \lambda\gamma)$. ∎

Possiamo,ora,eliminare l'ipotesi m=n ed anzi dimostrare il teorema 5.1 nel caso più generale $-\Delta u + K(x) u^p = 0$ con $p > 1$

<u>TEOREMA</u> 5.10

Sia $K(x)$ una funzione continua,limitata e localmente hölderiana in $\mathbb{R}^n$

i) Se $m \geq 3$, $x \in (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ e $|K(x)| \leq C/|x|^{\ell}$

per $|x_2|$ grande,uniformemente in x con $C > 0$ e $\ell > 2$

Allora il problema $\Delta u + K(x) u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$ possiede infinite soluzioni positive e limitate con la proprietà che ognuna di esse è limitate inferiormente da una costante.

ii) Inoltre, se a) $K(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ oppure

b) $K(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Allora $\Delta u + K(x) u^p = 0$ ha infinite soluzioni positive e limitate tali che ognuna di esse tende ad una costante positiva all'infinito nella direzione x_2.

Dimostrazione

ii) a)

Se ci restringiamo al sottospazio $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, il teorema 5.4 ci assicura l'esistenza di una funzione $\tilde{v}(x_2)$ positiva, radialmente simmetrica, non crescente, tendente ad una costante positiva all'infinito e t.c.

$-\Delta \tilde{v} > 0$ in $\mathbb{R}^n$ e $-\Delta \tilde{v} \geq C_1/|x_2|^\ell$ all'infinito con $C_1 > 0$

Definiamo $v(x) = v(x_1, x_2) = \tilde{v}(x_2)$ in $\mathbb{R}^n$

Allora:

$$\Delta \alpha v + K(x)(\alpha v)^p \leq \alpha(\Delta v + \alpha^{p-1} \cdot c \cdot |K(x)|) \leq 0 \quad \text{per } \alpha > 0 \text{ piccolo.}$$

Quindi αv è una sopra-soluzione per il nostro problema.

Sia $\gamma = \lim_{|x_2| \to \infty} \alpha \tilde{v}(x_2) > 0$

Poichè $K \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$ allora γ è una sotto-soluzione.

Poichè $\alpha v > \gamma$, per il teorema 5.5, esiste una soluzione u con

$\alpha v \geq u \geq \gamma$ in $\mathbb{R}^n$.

Per ottenere infinite soluzioni occorre scegliere α piccoli e ripetere la dimostrazione.

i)

Come nella dimostrazione precedente, troviamo una sopra-soluzione

Limitiamoci ad $\mathbb{R}^m$

Per il teorema 5.1 (ii) b) esiste una funzione limitata $\tilde{\omega} \geq \varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}^m$

con $\Delta \tilde{\omega} > 0$ e $\Delta \tilde{\omega} \geq C_2/|x_2|^\ell$ all'infinito per $C_2 > 0$

Sia $\omega(x) = \omega(x_1, x_2) = \tilde{\omega}(x_2)$.

Per $\beta > 0$ piccolo, si ha:

$$\Delta(\beta\omega) + K(x)(\beta\omega)^p \geq \beta(\Delta\omega + \beta^{p-1}\omega^p(-|K(x)|)) \geq 0$$

Poniamo $u_2 = \beta\omega$ con β t.c. $u_2 < \gamma$

Quindi, $u_1 > u_2$ e si può applicare il teorema 5.5 potendo così concludere che esiste una soluzione u con $u_1 \geq u \geq u_2$ in $\mathbb{R}^n$.

Ripetiamo la dimostrazione con β più piccolo. ■

E' possibile anche ottenere dei risultati di non esistenza utilizzando delle stime a priori.

Consideriamo il caso $K \geq 0$ (nel caso $K \leq 0$ si procede in maniera analoga considerando v soluzione positiva di $\Delta v - K(x) v^{(n+2)/(n-2)} = 0$).

Sia u una soluzione positiva del problema (I).

Definiamo:

$$\bar{u}(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x|=r} u(x)\, dS = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} u(rz)\, dS$$

$$\bar{\bar{K}}(r) = \left(\frac{1}{\omega_m r^{n-1}} \int_{|x|=r} \frac{dS}{K(x)^{(n-2)/4}} \right)^{-4/(n-2)} \qquad \bar{\bar{K}}(r) = 0 \text{ se } \int_{|x|=r} \frac{dS}{K(x)^{(n-2)/4}} = \infty$$

dove ω_n è l'area della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ e dS è l'elemento del volume nell'integrale di superficie.

<u>LEMMA</u> 5.11

Sia u soluzione positiva di (I) in $\mathbb{R}^n$ allora $\bar{u}$ soddisfa:

$$\begin{cases} \bar{u}'' + \frac{n-1}{r}\bar{u}' + \bar{\bar{K}}(r)\,\bar{u}^{(n+2)/(n-2)} \leq 0 & \text{in } [0,\infty) \\ \bar{u}'(0) = 0 \end{cases}$$

$\bar{u}$ è sempre non crescente.

Quindi, abbiamo:

TEOREMA 5.12

Sia u una soluzione positiva di (I).

Se $K(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{\bar{K}}(r) \geq C \cdot r^p$ con r grande, $C > 0$ e $p \geq -2$

allora:

$$\frac{C_1}{r^{\frac{p+2}{2} \cdot \frac{n-2}{2}}} \geq \bar{u}(r) \geq \frac{C_2}{r^{n-2}} \qquad r \text{ grande e } p > -2$$

$$\frac{C_1}{(\log r)^{(n-2)/4}} \geq \bar{u}(r) \geq \frac{C_2}{r^{n-2}} \qquad r \text{ grande e } p = -2$$

COROLLARIO 5.13

Se $K \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$ e $\bar{\bar{K}} \geq C \cdot r^p$ per r grande, $C > 0$ e $p > 2$ allora il problema (I) non possiede alcuna soluzione positiva in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo, ora, il caso in cui $K(x)$ è una funzione radialmente simmetrica.

Nel caso particolare in cui K è una costante positiva è noto che il problema (I) possiede soluzioni positive.

Anzi, per $K = 1$ si conosce la forma esplicita delle soluzioni:

$$u(x) = \frac{\left[n(n-2)\lambda^2\right]^{(n-2)/4}}{\left(\lambda^2 + |x - x_0|^2\right)^{n/2 - 1}}$$

e si sa che considerando un'applicazione conforme $x \longrightarrow y$, la funzione

$v(y) = u(x) J_{(x)}^{(2-n)/2n}$ è ancora una soluzione. (cfr. [7])

Nel caso più generale, si ha:

TEOREMA 5.13

Sia $h(r) = \int_0^r s^n K'(s)\, ds$

Se $K \geq 0$ e $h \leq 0 \quad \forall r \geq 0$

allora il problema (I) ha infinite soluzioni positive radialmente simmetriche in $\mathbb{R}^n$

Dimostrazione

Prima, osserviamo che l'espressione dell'identità di Pohozaev nel caso di una funzione u radiale, soluzione del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + f(r)p(u) = 0 & \text{in } B_R \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

con $f(r)$ lipsichitziana

è la seguente:

$$\frac{1}{2} R^n \cdot (u'(R))^2 = \int_0^R \left[n r^{n-1} f(r) P(u) - \frac{n-2}{2} r^{n-1} f(r) u p(u) dr + \right.$$
$$+ \int_0^R r^n f'(r) P(u)\, dr$$

dove $P(u) = \int_0^u p(t)\, dt$

Adesso consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' + K(r) u^{(n+2)/(n-2)} = 0 & \text{in } [0,\infty) \\ u(0) = \alpha \quad ; \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

e dimostriamo che $\forall \alpha > 0$ tale problema ha una soluzione positiva in $[0,\infty)$ cioè che possiamo estendere la soluzione u che il problema possiede vicino allo 0 e che questa rimana positiva.

Quindi, supponiamo per assurdo che $u(R) > 0$ e $u > 0$ in $[0, R)$ per $R \in (0,\infty)$

Applichiamo l'identità di Pohozaev:

$$\frac{1}{2} R^n \cdot u_r^2(R) = \int_0^R r^{n-1} K(r) \left[\frac{n-2}{2} u^{2n/(n-2)} - \frac{n-2}{2}) u^{2n/(n-2)} \right] dr +$$
$$+ \int_0^R r^n K'(r) u^{2n/(n-2)} \frac{n-2}{2n} dr$$

Poichè, sappiamo dal lemma di Hopf che $u_r(R) < 0$, allora $\int_0^R r^n K'(r) \frac{n-2}{2n} u^{2n/(n-2)} dr > 0$

Ma ciò è in contrasto con l'ipotesi $h(r) \leq 0 \quad \forall r \geq 0$

COROLLARIO 5.14

Le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte da una funzione $K(x)$ non-negativa e non-crescente in $r > 0$.

Anche nel caso di $K(x)$ funzione radialmente simmetrica, si può dare un risultato di non esistenza mediante opportune stime a priori.

TEOREMA 5.15

Sia $K(r) \geq 0$ non decrescente ed esistano C_1 e C_2 costanti positive t.c. $C_1 r^{\ell-1} \geq K'(r) \geq C_2 r^{\ell-1}$ per r grande e $\ell \in (0,2)$

Allora il problema (I) non ha soluzioni positive e radialmente simmetriche in $\mathbb{R}^n$.

6. CASO CRITICO E SUPER-CRITICO IN $\mathbb{R}^n$

Ci soffermeremo, ora, su un risultato di Berestycki-P.L.Lions (cfr. [4]) circa l'esistenza di soluzioni positive del problema:

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \qquad \text{con} \quad g(0)=0$$

quando "g" ha una crescita critica o super-critica.

Anche in questo caso, sfruttando la simmetria radiale dell'eventuale soluzione, si studia direttamente il problema dell'esistenza di una soluzione positiva del problema di Cauchy associato:

$$\begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r} u' = g(u) & 0 < r < \infty \\ u(0) = \alpha \quad ; \quad u'(0)=0 \end{cases}$$

E' da notare che la dimostrazione di tale risultato è una semplice conseguenza dell'identità di Pohozaev.

TEOREMA 6.1

Sia $n \geq 3$ e sia $g(u)$ una funzione su $\mathbb{R}_+$ lipschitziana e t.c.

$$g(0)=0 \ , \ g(u) > 0 \quad \text{per } u > 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{2n}{n-2} G(u) - u\,g(u) \geq 0 \quad \forall u \geq 0 \tag{6.2}$$

Allora, $\forall \alpha > 0$ la soluzione $u(r)$ del seguente problema:

$$\begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r} u' = g(u) & \forall r > 0 \\ u(0) = \alpha \quad ; \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

soddisfa $u(r) > 0 \ \forall r > 0$, $u'(r) < 0 \ \forall r > 0$ e $\lim_{r \to \infty} u(r) = 0$

OSSERVAZIONE 6.3

L'ipotesi (6.2) del teorema precedente è soddisfatta dalle funzioni:

$$g(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u^{p_i} \qquad \text{con} \quad \lambda_i > 0 \qquad \text{e} \quad p_i \geq (n+2)/(n-2)$$

In particolare, da $g(u) = \lambda u^p$ ($\lambda > 0$ e $p \geq (n+2)/(n-2)$)

Premettiamo alla dimostrazione del teorema, un lemma:

LEMMA 6.4

Sia $g(u)$ una funzione localmente lipschitziana su $\mathbb{R}_+$ e t.c. $g(0)=0$.

Sia $x_1 \in (0,\infty)$ t.c. $u(x_1,r) > 0 \quad \forall r \geq 0$ e $u'(x_1,r) < 0 \quad \forall r > 0$

Allora $\ell = \lim_{r \to \infty} u(x_1,r)$ soddisfa l'equazione:

$$g(\ell) = 0$$

Dimostrazione

Moltiplichiamo $-u'' - \frac{n-1}{r} u' = g(u)$ per u' ed integriamo tra 0 ed r.

Si ottiene:

$$\frac{1}{2}[u'(x_1,r)]^2 + (n-1)\int_0^r [u'(x_1,s)]^2 \frac{ds}{s} = G(u(x_1,0)) - G(u(x_1,r))$$

Quindi, $\int_0^\infty [u'(x_1,s)]^2 \frac{ds}{s} < \infty$, cioè $u'(x_1,r)$ converge per $r \to \infty$

Ma tale limite non può che essere 0 perchè u è limitata.

Ora facilmente si nota che $u''(x_1,r)$ converge per $r \to \infty$ ed allo stesso modo poichè u' è limitata, $u''(x_1,r)$ converge a 0 per $r \to \infty$

Basta, allora, far tendere $r \to \infty$ all'infinito nell'espressione:

$$-u'' - \frac{n-1}{r} u' = g(u)$$

per avere $g(\ell) = 0$. ■

Questo lemma è la chiave per capire la differenza tra il risultato in [9] e quello in [4].

In entrambi i casi è trattato il caso critico, ma con apparente difformità di risultati.

Nel primo lavoro citato, le soluzioni tendono ad una costante strettamente positiva, nel secondo allo 0.

Ma ciò deriva dal fatto che nel primo lavoro è: $K(x) \geq 0 \quad \forall x$

senza la restrizione $K(0)=0$ e $K(x)>0$ per $x>0$

Ritorniamo alla dimostrazione del teorema 6.1

Poichè $g(u)>0$, dal risultato in [7] sulla simmetria delle soluzioni, si ha

$$u'(r)<0 \qquad \forall r \in (0, r_0) \qquad \text{con } r_0 \leq +\infty \text{ e t.c. } u>0 \text{ in } (0,r_0).$$

Supponiamo, per assurdo, che $\exists r_0 < \infty$ t.c. $u(r_0)=0$ e $u>0$ in $(0,r_0)$.

Allora u è soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } B_{r_0} \quad u \in C^2(\overline{B}_{r_0}) \\ u>0 & \text{in } B_{r_0} \\ u=0 & \text{su } \partial B_{r_0} \end{cases}$$

Per l'ipotesi (6.2), ciò è in evidente contrasto con l'identità di Pohozaev.

Quindi: $r_0 = +\infty$

Poi, applicando il lemma precedente, poichè $g(\ell)=0$ implica $\ell = 0$,

$$\lim_{r \to \infty} u(r) = 0 \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI - P. H. RABINOWITZ, Dual variational methods in critical point theory and applications. Journal of functional analysis 14, pp. 349 - 381 (1973)

[2] H. BERESTYCKI - P. L. LIONS, Existence d'onde solitaires dans des problèmes non-linéaires du type Klein - Gordon. Compes Rendus Paris, Sèrie A, 287, pp. 503 - 506 (1978)

[3] H. BERESTYCKI - P. L. LIONS, Une méthode locale pour l'existence de solutions positives de problèmes semi-lineaires elliptiques dans $\mathbb{R}^n$, Journal Analyse Math.,38, pp. 144 - 187 (1980)

[4] H. BERESTYCKI - P. L. LIONS, An ode approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbb{R}^n$. Indiana University Mathematics Journal, 30, pp. 141 - 157 (1981)

[5] H. BREZIS - L. NIREMBERG, Positive solutions of non-linear elliptic equations involving critical Sobolev exponents (preprint)

[6] D. de FIGUEIREDO - P.L. LIONS - R. D. NUSSBAUM, Estimations à priori pour les solutions positives de problèmes elliptiques semilinéaires. Comptes Rendus Paris, Serie A, 290, pp.211 - 220 (1980)

[7] B. GIDAS - WEI - MING NI - L. NIREMBERG, Symmetry and related properties via the Maximum Principle. Comm. Math. Phys. 68, pp. 209 - 243 (1979)

[8] J. L. KAZDAN - F. W. WARNER, Remarks on some quasi-linear elliptic equations. Comm. Pure and appl. Math.,XXVIII, pp. 567 - 597 (1975)

[9] WEI - MING - NI, On the elliptic equation $\Delta u + K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ its generalizations and applications in Geometry. Indiana University Math. Journal,31, 4, pp. 493 - 529 (1982)

[10] WEI - MING NI, A non-linear Dirichlet problem on the unit ball and its applications. Indiana University Math. Journal 31, 6, pp.801-807 (1982)

[11] S. I. POHOZAEV, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ Soviet Math. Dokl., 5, pp. 1408 - 1411

[12] P. H. RABINOWITZ, Variational methods for non-linear elliptic eigenvalue problems. Indiana University Math. Journal, 23,8, pp. 729 - 754 (1974)

[13] P. H. RABINOWITZ, Some global results for non-linear eigenvalue problems.Journal of functional analysis,7, pp. 487 -513 (1971)

[14] G. TALENTI, Best constant in Sobolev inequalities. Annali di Mat. 110, pp. 353 - 372 (1976)